# POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

## Troisième partie 3. Résultat sur la conjecture de torsion par Cadoret–Tamagawa

### 2. Introduction aux groupes fondamentaux étales et les cohomologies $l$-adiques

(17/02/2021 et 24/02/2021 par Jinzhao Pan)

#### 2.1. Morphismes étales.

**Définition 2.1.** *Un morphisme de type fini entre deux schémas $f\colon X \to Y$ est appelé* ***étale*** *si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

*(i) $f$ est plat, et le morphisme diagonal $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ est ouvert et fermé ;*
*(ii) $f$ est lisse de dimension relative $0$ ;*
*(iii) $f$ est plat et non-ramifié.*

*Sont particulièrement importants les morphismes* ***finis et étales****.*

Chaque morphisme étale est un morphisme ouvert.

**Remarque 2.2.** *Les morphismes étales sont les analogues en géométrie algébrique des homéomorphismes locaux en topologie, et les morphismes finis et étales correspondent aux revêtements finis.*

**Exemple 2.3.** *(i) Soit $K$ un corps. Un morphisme $f\colon X \to \mathrm{Spec}K$ est étale si et seulement si $X \simeq \mathrm{Spec}R$, où $R$ est un produit fini d'extensions finies séparables de $K$.*
*(ii) Soit $L/K$ une extension finie de corps de nombres. Alors le morphisme naturel $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_L \to \mathrm{Spec}\mathcal{O}_K$ est étale si et seulement si $L/K$ est non-ramifiée en toute place finie.*

Voici quelques propriétés élémentaires des morphismes étales :

**Proposition 2.4.** *(i) (stable par composition) Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ deux morphismes étales, alors $g \circ f\colon X \to Z$ est étale.*
*(ii) (stable par changement de base) Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme étale. Alors pour tout $Z \to Y$, le morphisme induit $X \times_Y Z \to Z$ est étale.*
*(iii) Si dans le diagramme commutatif $g \circ f$ et $g$ sont tous les deux étales, alors $f$ l'est aussi.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

2.2. **Groupe fondamental étale.** Nous faisons le tableau suivant pour comparer la topologie et la géométrie algébrique. Dans ce tableau, $X$ est supposé connexe, en tant qu'espace topologique ou schéma selon le contexte, et le *groupe fondamental étale* sera défini.

| topologie | géométrie algébrique |
|---|---|
| $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)$ | |
| revêtements finis | morphismes finis et étales |
| revêtements galoisiens :<br>$f\colon X'\to X$ revêtement avec $X'$ connexe tel que pour tout $x\in X$, $\mathrm{Aut}(X'/X)$ agit transitivement sur $f^{-1}(x)$, ce qui est équivalent à $\#\mathrm{Aut}(X'/X)=\deg f$ si $f$ est un revêtement fini. | revêtements galoisiens :<br>$f\colon X'\to X$ fini et étale avec $X'$ connexe tel que pour tout point géométrique $x\colon \mathrm{Spec}\overline{k}\to X$, $\mathrm{Aut}(X'/X)$ agit transitivement sur $f^{-1}(x)$, où $f^{-1}(x)=\{x'\in X'(\overline{k}) : f\circ x'=x\}$. |
| Fixons $x\in X$, considérons la catégorie des revêtements finis galoisiens de $X$ muni d'un point de base. [1]<br>$\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x):=\varprojlim_{(X',x')/(X,x)}\mathrm{Aut}(X'/X)$. | Fixons $x$ un point géométrique de $X$, considérons la catégorie des revêtements galoisiens de $X$ muni d'un point de base.<br>Définissons le ***groupe fondamental étale*** comme $\pi_1^{\text{ét}}(X,x):=\varprojlim_{(X',x')/(X,x)}\mathrm{Aut}(X'/X)$. |
| Le revêtement universel existe :<br>$\widetilde{f}\colon\widetilde{X}\to X$ galoisien tel que tout revêtement se factorise par $\widetilde{f}$.<br>Si l'on fixe un point de base, alors cette factorisation est unique.<br>$\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Aut}(\widetilde{X}/X)$<br>$\to\varprojlim_{(X',x')/(X,x)}\mathrm{Aut}(X'/X)=\pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)$<br>$\Longrightarrow \pi_1^{\mathrm{alg}}(X,x)\simeq\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)}$ | |

Pour $X$ connexe, le groupe fondamental étale ne dépend pas du choix du point de base. En effet si $x'$ est un autre point géométrique, alors $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)\simeq\pi_1^{\text{ét}}(X,x')$.

**Lemme 2.5** (Fonctorialité)**.** *Soit $\varphi\colon (X,x)\to(Y,y)$ un morphisme entre deux schémas muni d'un point de base. Alors $\varphi$ induit naturellement un morphisme de groupes $\pi_1^{\text{ét}}(X,x)\to\pi_1^{\text{ét}}(Y,y)$.*

**Exemple 2.6.** *Soit $K$ un sous corps de $\mathbb{C}$. Soit $X$ une variété irréductible sur $\overline{K}$. Alors tout revêtement galoisien de $X$ donne un revêtement fini galoisien de $X(\mathbb{C})$. Le théorème d'existence de Riemann [SGA1, Thm.5.1] affirme que l'inverse est aussi vraie. Donc l'on a $\pi_1^{\text{ét}}(X)\simeq\pi_1^{\mathrm{alg}}(X)\simeq\widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(X)}$.*

**Exemple 2.7.** *(i) Soit $K$ un corps. Alors $\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}K)\simeq\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.*

*(ii) Soient $K$ un corps et $X$ une variété géométriquement connexe définie sur $K$. Alors l'on a la suite exacte*

$$0\to\pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{K}})\to\pi_1^{\text{ét}}(X)\to\pi_1^{\text{ét}}(\mathrm{Spec}K)=\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)\to 0.$$

[1]. L'avantage est que dans cette catégorie, il existe au plus 1 morphisme entre chaque deux objets. Autrement dit, $\#\,\mathrm{Hom}_{(X,x)}((X'',x''),(X',x'))\leq 1$.

*Le **groupe fondamental étale géométrique** est défini comme* $\pi_1^{\mathrm{geom}}(X) := \pi_1^{\text{ét}}(X_{\overline{K}})$.

2.3. **Faisceau étale.** Soit $X$ un schéma.

**Définition 2.8.** *La catégorie $X_{\text{ét}}$ des schémas étales sur $X$ est définie comme suit.*
- ***Objets :*** *$Y \to X$ étale ;*
- ***Morphismes :*** *Les morphismes entre $f\colon Y \to X$ et $g\colon Z \to X$ sont les morphismes $\varphi\colon Y \to Z$ tels que $g \circ \varphi = f$. Remarquons que $\varphi$ est automatiquement étale.*
- *De plus, $X_{\text{ét}}$ est munie d'une topologie de Grothendieck : pour $U \in X_{\text{ét}}$, un recouvrement de $U$ est une famille de morphismes $\{f_i\colon U_i \to U\}_{i\in I}$ dans $X_{\text{ét}}$ telle que $U = \bigcup_{i\in I} \mathrm{Im}(f_i)$ en tant qu'espace topologique.* [2]

*Ceci fait $X_{\text{ét}}$ un site, qui est appelé le **petit site étale** sur $X$.*

Ayant le site $X_{\text{ét}}$ (la catégorie munie de la topologie de Grothendieck), nous pouvons définir les (pré)faisceaux étales sur $X$.

**Définition 2.9.** *(i) Un préfaisceau étale $\mathcal{F}$ sur $X$ est un foncteur $(X_{\text{ét}})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}ns$ ; $\mathcal{F}$ est dit **abélien** s'il est à valeur dans $\mathcal{A}b$.*

*(ii) Un faisceau étale $\mathcal{F}$ sur $X$ est un préfaisceau tel que pour tout recouvrement $\{U_i \to U\}_{i\in I}$, le diagramme*

$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j)$$

*est un égaliseur.*

**Lemme 2.10** (« sheafification »)**.** *Étant donné d'un préfaisceau étale $\mathcal{F}$, il existe un faisceau associé $\mathcal{F}^+$ (muni d'un morphisme $\iota\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ de préfaisceaux) satisfaisant la propriété suivante. Pour tout faisceau étale $\mathcal{G}$ et toute transformation naturelle $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, il existe une unique transformation naturelle $\widetilde{f}\colon \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ telle que $f = \widetilde{f} \circ \iota$.*

*Autrement dit, le foncteur d'oubli $\mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}) \to \mathcal{P}re\mathcal{F}ais(X_{\text{ét}})$ admet un foncteur adjoint à gauche.*

**Remarque 2.11.** *Cette opération de « sheafification » existe pour toutes les topologies de Grothendieck.*

**Exemple 2.12** (faisceau représentable)**.** *Soit $Y$ un schéma sur $X$. Alors $h_Y := (U \mapsto \mathrm{Hom}_X(U, Y))$ est un faisceau étale.*

**Exemple 2.13** (faisceau constant)**.** *Soit $A$ un schéma en groupes. Alors le faisceau constant $\underline{A}$ (à valeur dans la catégorie des groupes abéliens) est représentable par $A \times X$.*

*(i) Si $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, alors l'on obtient le faisceau $\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ (à valeur dans la catégorie des groupes abéliens) qui est représentable par $\overline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \times X$.*

*(ii) Si $A = \mathbb{G}_m$, alors l'on obtient le faisceau $\underline{\mathbb{G}}_m = (U \mapsto \mathcal{O}(U)^*)$, qui est représentable par $\mathbb{G}_m \times X = \mathrm{Spec}_X(\mathcal{O}_X[t, t^{-1}])$.*

[2]. Il n'est pas difficile de vérifier que ceci donne une topologie de Grothendieck : les produits fibrés existent, $\{\mathrm{id}_U\}$ est un recouvrement, un changement de base d'un recouvrement est encore un recouvrement, et la composition de deux recouvrements reste encore un recouvrement.

*(iii) Si $A = \mu_n$ avec $n$ inversible sur $X$, alors l'on obtient le faisceau $\underline{\mu}_n = (U \mapsto \{a \in \mathcal{O}(U) : a^n = 1\})$, qui est représentable par $\mu_n \times X = \mathrm{Spec}_X \mathcal{O}_X[t]/(t^n - 1)$.*

**Exemple 2.14** (faisceau de torsion)**.** *Le faisceau associé à un préfaisceau abélien dont les sections sont toutes de torsion est appelé* ***un faisceau de torsion****. Nous avons vu deux tels exemples au-dessus : $\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ et $\underline{\mu}_n$.*

**Exemple 2.15** (faisceau localement constant et constructible)**.** *Supposons que $X$ est connexe. Posons $X_{\text{fét}}$ la catégorie des schémas finis et étales sur $X$. Par le grand tableau dans la sous-section 2.2, l'on a une équivalence de catégories entre $X_{\text{fét}}$ et la catégories des $\pi_1^{\text{ét}}(X)$-ensembles finis.*

*Un faisceau étale sur $X$ est dit* ***localement constant et constructible*** *s'il est représentable par un schéma dans $X_{\text{fét}}$. Par le paragraphe précédent, l'on a donc une bijection*

$$\{\textit{faisceaux localement constants et constructibles sur } X\} \leftrightarrow \{\pi_1^{\text{ét}}(X)\textit{-ensembles finis}\}.$$

*Si l'on considère les faisceaux abéliens, alors le membre à droite est remplacé par $\{$les groupes abéliens finis muni d'une action continue de $\pi_1^{\text{ét}}(X)\}$.*

2.4. **Faisceau $l$-adique.** Soit $l$ un nombre premier inversible sur $X$.

**Définition 2.16.** *Un* ***faisceau $l$-adique*** *sur $X$ est une suite de faisceaux étales*

$$\mathcal{F} = (\cdots \to \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_n \to \cdots \to \mathcal{F}_1)$$

*telle que $l^n \mathcal{F}_n = 0$ et $\varphi_n$ induit $\mathcal{F}_{n+1}/l^n\mathcal{F}_{n+1} \simeq \mathcal{F}_n$ pour chaque $n \geq 1$.*

**Exemple 2.17.** $\underline{\mathbb{Z}}_l := (\cdots \to \mathbb{Z}/l^{n+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_n} \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ *avec $\varphi_n$ la projection naturelle.*

$\underline{\mathbb{Z}}_l(1) := (\cdots \to \mu_{l^{n+1}} \xrightarrow{\varphi_n} \mu_{l^n} \to \cdots \to \mu_l)$ *avec $\varphi_n$ la $l^n$-ème puissance.*

**Définition 2.18.** *Un faisceau $l$-adique $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ est dit* ***lisse*** *si tous les $\mathcal{F}_n$ sont localement constants et constructibles.*

Par les discussion dans l'Exemple 2.15, il y a une bijection entre l'ensemble des faisceaux $l$-adiques lisses sur $X$ et

$$\{\mathbb{Z}_l\text{-modules libres de rang fini muni d'une action } \mathbb{Z}_l\text{-linéaire et continue}\}.$$

2.5. **Cohomologolie étale et cohomologie $l$-adique.** Considérons la catégorie $\mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}, \mathcal{A}b)$ des faisceaux étales abéliens sur $X$. Le foncteur de sections globales

$$\Gamma(X, -)\colon \mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{A}b, \qquad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$$

est exact à gauche.

**Lemme 2.19.** *Il existe assez d'objets injectifs dans $\mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}, \mathcal{A}b)$.*

Ce lemme implique que tout foncteur exact à gauche admet un foncteur dérivé à droite.

**Définition 2.20.** *Le foncteur dérivé à droite $H^i_{\text{ét}}(X, -)$ de $\Gamma(X, -)$ est appelé l'$i$-ème cohomologie étale.*

**Définition 2.21.** *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ un faisceau $l$-adique. Sa cohomologie $l$-adique est définie comme*
$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) := \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}_n).$$

Ceci est une bonne définition si les $\mathcal{F}_n$ satisfassent de bonnes propriétés. Cette définition n'est pas bonne sur les point générique (par exemple, lorsque $X$ est le spectrum d'un corps), mais fonctionne bien sur les anneaux des $S$-unités.

Posons aussi
$$H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l) := H^i_{\text{ét}}(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l.$$
Sont particulièrement concernés lorsque $\mathcal{F} = \underline{\mathbb{Z}}_l, \underline{\mathbb{Z}}_l(1)$, *etc.*

2.6. **Résumé des catégories équivalentes.**

**Proposition 2.22.** *Les catégories suivantes sont équivalentes :*

*(i) les faisceaux abéliens, étales, localement constants, constructibles, et de torsion sur $X$ ;*

*(ii) les schémas en groupes abéliens finis et étales sur $X$ ;*

*(iii) les groupes abéliens finis muni d'une $\pi_1^{\text{ét}}(X)$-action continue.*

**Proposition 2.23.** *Les catégories suivantes sont équivalentes :*

*(i) les faisceaux $\mathbb{Z}_l$ (resp. $\mathbb{Q}_l$) lisses sur $X$ ;*

*(ii) les $\mathbb{Z}_l$-modules libres de rang fini (resp. $\mathbb{Q}_l$-espaces vectoriels de dimension finie) muni d'une $\pi_1^{\text{ét}}(X)$-action continue.*

2.7. **Image directe et image inverse.** Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas.

**Définition 2.24.** *(i) L'image directe*
$$f_*\colon \mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{F}ais(Y_{\text{ét}}, \mathcal{A}b), \quad \mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$$
*où $f_*\mathcal{F}$ est défini par $(V \to Y) \mapsto \mathcal{F}(V \times_Y X \to X)$.*

*Le foncteur $f_*$ est exact à gauche.*

*(ii) L'image inverse*
$$f^*\colon \mathcal{F}ais(Y_{\text{ét}}, \mathcal{A}b) \to \mathcal{F}ais(X_{\text{ét}}, \mathcal{A}b)$$
*est l'adjoint à gauche de $f_*$, c'est-à-dire* $\operatorname{Hom}(f^*\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$. *En fait, l'on a*
$$f^*\mathcal{G} = \big((U \to X) \mapsto \varinjlim \mathcal{G}(V \to Y)\big)^+$$
*où la limite directe parcourt*
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d] \\ V \arrow[r] & Y. \end{tikzcd}$$

*Le foncteur $f_*$ est un foncteur exact.*

Puisque $f_*$ est exact à gauche, il admet des foncteurs dérivés à droite.

**Définition 2.25.** *La $p$-ième image directe supérieure $R^p f_*$ est le $p$-ième foncteur dérivé à droite de $f_*$.*

En effet, l'on a

$$R^p f_* \mathcal{F} = \big((V \to Y) \mapsto H^p_{\text{ét}}(V \times_Y X, \mathcal{F})\big)^+ . \tag{2.1}$$

La suite spectrale de Leray pour $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ est

$$E_2^{pq} = R^p g_*(R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow R^{p+q}(gf)_* \mathcal{F} \tag{2.2}$$

et $E_2^{pq} = H^p_{\text{ét}}(Y, R^q f_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathcal{F})$.

Les morphismes de bord de (2.2) sont

$$\begin{tikzcd} R^p g_*(f_* \mathcal{F}) \arrow[r, "(A)"] & R^p(gf)_* \mathcal{F} \arrow[d, "(B)"] \\ & g_*(R^p f_* \mathcal{F}) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

2.8. **Changement de base.** Considérons le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y' \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Ici il faut penser que $f$ est l'application de structure et $g$ est l'application de changement de base.

Le but est d'étudier le comportement de $R^p f_*$ sous le changement de base $g$. L'application de changement de base est

$$g^*(R^p f_* \mathcal{F}) \to R^p f'_*((g')^* \mathcal{F}) \tag{2.4}$$

définie comme suit. Commençons par le morphisme adjoint

$$\mathcal{F} \to g'_*(g')^* \mathcal{F}.$$

Appliquant $R^p f_*$, l'on obtient $R^p f_* \mathcal{F} \to R^p f_* g'_*(g')^* \mathcal{F}$. Tenant compte du diagramme (2.3), l'on a ensuite

$$R^p f_* \mathcal{F} \to R^p f_* g'_*(g')^* \mathcal{F} \xrightarrow{(A)} R^p(fg')_*(g')^* \mathcal{F} = R^p(gf')_*(g')^* \mathcal{F} \xrightarrow{(B)} g_* R^p f'_*(g')^* \mathcal{F},$$

d'où l'application de changement de base (2.4) par la propriété adjointe.

**Définition 2.26.** *L'on dit que $R^p f_*$* ***commute avec le changement de base*** *$g$, si (2.4) est un isomorphisme.*

**Théorème 2.27** (Changement de base propre)**.** *Si $f$ est propre et $\mathcal{F}$ est torsion, alors (2.4) est un isomorphisme.*

**Théorème 2.28** (Changement de base lisse)**.** *Si $g$ est lisse et $f$ est qcqs (quasi-compact et quasi-séparé) et $\mathcal{F}$ est torsion inversible sur $Y$ (c'est-à-dire $n \cdot \mathcal{F} = 0$ pour un $n \in \mathbb{Z}$ inversible sur $Y$)*[3]*, alors (2.4) est un isomorphisme.*

[3]. Voici un fait utile : si $f$ est qcqs, alors $R^p f_*$ préserve les faisceaux de torsion.

Voici quelques conséquences.

**Proposition 2.29.** *Supposons que $f$ est lisse et propre et $\mathcal{F}$ est torsion inversible sur $Y$. Alors $R^p f_* \mathcal{F}$ est localement constant et constructible (dit « lcc ») si $\mathcal{F}$ l'est.*

*De plus, si $l$ est inversible sur $Y$, alors $R^p f_*$ préserve les $\mathbb{Q}_l$-faisceaux lisses.*

**Exemple 2.30.** *Considérons $\pi\colon \mathcal{E} \to X$ où $X$ est une courbe modulaire sur $\mathbb{Q}$ et $\mathcal{E}$ est la courbe elliptique universelle. Alors $R^1\pi_*\mathbb{Q}_l$ est un $\mathbb{Q}_l$-faisceau lisse sur $X$. En effet, $(R^1\pi_*\mathbb{Q}_l)_x$ est la duale de $V_l(E)$ en chaque point $x$ de $X$.*

### 2.9. Le théorème de semisimplicité.

**Théorème 2.31** (Deligne, Hodge II)**.** *Soient $S$ un schéma connexe séparé sur $\mathbb{C}$, $s\colon \mathrm{Spec}\mathbb{C} \to S$ un point de base, $f\colon X \to S$ un morphisme de schémas tel que $R^p f_*\mathbb{Q}$ est un système local sur $S$.*

*Soit $G$ l'adhérence de Zariski de l'image de $\pi_1(S^{\mathrm{an}}, s)$ dans $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}((R^p f_*\mathbb{C})_s)$. Posons $G^o$ la composante neutre de $G$.*

*(i) Si $f$ est propre et lisse, alors $G^o$ est semisimple.*

*(ii) En général, le radical de $G$ est unipotent. Autrement dit, $G$ ne contient pas de quotient qui est un tore algébrique.*

**Théorème 2.32** (Weil II)**.** *Soient $S$ un schéma connexe lisse séparé sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{s}$ un point fermé de $S$, $f\colon X \to S$ un morphisme propre et lisse.*

*Soit $G$ l'adhérence de Zariski de l'image de*

$$\rho\colon \pi_1^{\text{ét}}(S) \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_l}((R^p f_*\mathbb{Q}_l)_{\overline{s}}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}_l}(H^p(X_{\overline{s}}, \mathbb{Q}_l)).$$

*Posons $G^o$ la composante neutre de $G$. Alors $G^o$ est semisimple.*