POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

Troisième partie 3. Résultat sur la conjecture de torsion par Cadoret–Tamagawa

1. (bis) Compléments sur les modules de Tate

(24/02/2021 par Marc Hindry)

Soit X un schéma projectif lisse défini sur un corps K.

L'on peut définir les groupes de cohomologies $H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, R)$ avec $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_l, \mathbb{Q}_l$. En effet, $H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) = \varprojlim H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z})$ et $H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) = H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l) \otimes \mathbb{Q}_l$.

Le groupe de Galois $\Gamma_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ agit sur $X_{\overline{K}}$. Ceci induit une action de Γ_K sur $H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l)$, et de plus un morphisme

$$H^p_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_l) \to H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l)^{\Gamma_K} \tag{1.1}$$

où le membre à droite est le sous-groupe de $H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Z}_l)$ des éléments invariants sous l'action de Γ_K.

Théorème 1.1 (Théorème de comparaison)**.** *Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, alors l'on a un isomorphisme*

$$H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l) \xrightarrow{\sim} H^p(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_l. \tag{1.2}$$

Conjecture 1.2 (Conjecture de Tate)**.** *Si K est de type fini sur $\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{Q}$, alors*

$H^{2p}_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)^{\Gamma_K}(p) = \mathbb{Q}_l$-espace vectoriel engendré par les cycles algébriques de codim p.

Pour simplifier les notations, posons

$$H^p(X) := H^p_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l). \tag{1.3}$$

Alors H^p satisfait les axioms de la cohomologie de Weil.

Lemme 1.3. $\dim H^p(X) < \infty$ *(et $= 0$ pour $p > 2\dim X$).*

Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas, alors il induit $f^*\colon H^p(Y) \to H^p(X)$.

Proposition 1.4 (Formule de Künneth)**.** *Considérons les deux projections naturelles $p_1\colon X \times Y \to X$ et $p_2\colon X \times Y \to Y$. Il existe un cut-produit pour tous les p et q*

$$H^p(X) \times H^q(Y) \to H^{p+q}(X \times Y), \quad (y, z) \mapsto p_1^*(y) \smile p_2^*(z). \tag{1.4}$$

Ceci induit un isomorphisme

$$\bigoplus_{p+q=n} H^p(X) \otimes H^q(Y) \xrightarrow{\sim} H^n(X \times Y). \tag{1.5}$$

Proposition 1.5 (Dualité)**.** *Posons $d = \dim X$. Alors l'on a* *(i)* $\mathrm{tr}_X \colon H^{2d}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_l$.

(ii) $H^p(X) \times H^{2d-p}(X) \xrightarrow{\smile} H^{2d}(X) \simeq \mathbb{Q}_l$ *est une dualité parfaite.*

Proposition 1.6 (Cycle)**.** *Pour le morphisme de cycle* $\mathrm{cl}_X \colon \mathrm{CH}^i(X) \to H^{2i}(X)$*, l'on a, lorsque* $i = d$*,*

$$\mathrm{tr}_X \circ \mathrm{cl}_X(P) = 1 \tag{1.6}$$

pour tout point fermé P*.*

De plus, l'on a

$$f^* \circ \mathrm{cl}_Y = \mathrm{cl}_X \circ f^* \tag{1.7}$$

pour chaque morphisme de schémas $f \colon X \to Y$*.*

Nous terminons cette section par la comparaison de cohomologies en point générique et en point géométrique suivante.

Théorème 1.7. *Soient* $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)$ *et* $X \to S$ *un morphisme propre lisse. Alors l'on a*

$$H^i(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \mathbb{Q}_l) \simeq H^i(X_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathbb{Q}_l). \tag{1.8}$$