POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

Deuxième partie 2. Majoration du nombre des points rationnels sur les courbes par Dimitrov–Gao–Habegger

3. Panorama sur les estimations de zéros

(12/11/2020 par Sinnou David)

Dans cet exposé, $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

3.1. **Introduction.** Le but de cet exposé est d'énoncer, placer dans leur contexte et esquisser des preuves de trois énoncés classiques à propos des estimations de zéros en géométrie diophantienne : le *lemme de Dyson* (géométrique), le *lemme de Roth* (arithmétique), et le *théorème du produit de Faltings* (géométrique et arithmétique). Nous les traiterons comme des cas particuliers de *l'estimation de Philippon.*

Tous ces énoncés sont en fait des *critères d'injectivité.*

Commençons par des cas simples.

Lemme 3.1 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Soit P un polynôme en une variable non nul de degré D à coefficients dans un corps infini k. Alors P a au plus D racines (comptées avec multiplicités).*

La situation pour les polynômes en plusieurs variables est différente de manière essentielle : soit P un polynôme en 2 variables non nul à coefficients dans un corps k, alors P a une infinité de zéros si k est algébriquement clos. Pourtant, l'on a :

Lemme 3.2. *Soit P un polynôme en 2 variables (disons X_1, X_2) non nul de degré D à coefficients dans un corps k. Soit $S \subseteq k$ un ensemble de cardinal $\geq D + 1$. Alors $P|_{S \times S}$ n'est pas identiquement nul.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que $P|_{S\times S}$ est identiquement nul.

Prenons $\alpha \in S$. Alors $P(\alpha, X_2)$ est un polynôme de degré $\leq D$. Il a au moins $D + 1$ racines car tous les éléments de S en sont. Donc $P(\alpha, X_2)$ est identiquement nul par le théorème fondamental de l'algèbre. Par conséquent, $X_1 - \alpha | P$.

Donc l'on a $\prod_{\alpha \in S}(X_1 - \alpha)|P$. Par conséquent, $\deg P \geq \sum_{\alpha\in S} \deg(X_1 - \alpha) = \#S \geq D + 1$. Ceci donne une contradiction à $\deg P \leq D$. □

Par récurrence l'on peut généraliser Lemme 3.2 aux polynômes en n variables.

La proposition suivante n'est qu'une reformulation du Lemme 3.2. Elle traduit Lemme 3.2 en l'injectivité d'un certain morphisme.

Proposition 3.3. *Soit $S \subseteq \mathbb{A}^1(k)$ un ensemble fini. Considérons le morphisme d'évaluation*

$$\mathrm{eval}\colon \Gamma(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}(D)) \to \Gamma(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}(D))|_{S\times S}.$$

Alors ce morphisme eval *est injectif si* $\# \geq D+1$.

Plus généralement, les estimations de zéros peuvent se formuler dans la façon suivante.

Question 3.4. *Soit X un schéma. Soient $\mathcal{L}$ un fibré sur X et Y un sous-schéma de X. L'on cherche un critère permettant d'assurer que le morphisme d'évaluation*

$$\mathrm{eval}\colon \Gamma(X,\mathcal{L}) \to \Gamma(X,\mathcal{L})|_Y. \tag{3.1}$$

est injectif.

Avant de continuer, nous donnons un exemple de tel critère pour les variétés abéliennes.

Proposition 3.5 (Moret-Bailly)**.** *Soient A une variété abélienne et $\mathcal{L}$ un fibré en droites très ample. Alors le morphisme d'évaluation*

$$\Gamma(A,\mathcal{L}) \to \Gamma(K(\mathcal{L}), \mathcal{L}|_{K(\mathcal{L})})$$

est injectif. Ici $K(\mathcal{L}) = \{a \in A : t_a^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}\}$.

3.2. **Lemme de Dyson.** Dans cette sous-section nous donnons l'énoncé et la démonstration du lemme de Dyson dans sa version d'origine. [1]

Soient $a>0$ et $b>0$ deux nombres réels. Notons

$$\Sigma(a,b) = \left\{(t_1,t_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \frac{t_1}{a} + \frac{t_2}{b} \leq 1\right\}. \tag{3.2}$$

Définition 3.6. *Soient $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polynôme et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2$. L'on dit que P* ***s'annule en*** (α,β) ***avec multiplicité*** $\Sigma(a,b)$ *si pour tout $(t_1,t_2) \in \Sigma(a,b)$, l'on a*

$$\partial_{(t_1,t_2)} P|_{(\alpha,\beta)} := \left.\frac{\partial^{t_1+t_2}}{\partial x^{t_1}\partial y^{t_2}}(P)\right|_{(\alpha,\beta)} = 0.$$

Théorème 3.7 (Lemme de Dyson, deux variables)**.** *Soit $P \in \mathbb{C}[X,Y]$ un polynôme non nul de degré*

$$\deg_X(P) \leq u, \quad \deg_Y(P) \leq s.$$

Soit $S = \{(x_i,y_i)\}_{0\leq i\leq n} \subseteq \mathbb{C}^2$ un sous-ensemble fini de cardinal $n+1$. L'on se donne des nombres réels δ, λ, θ_i avec $i \in \{0,\dots,n\}$ qui satisfont

(i) $0<\delta<1$;

(ii) $\lambda \geq 2/\delta$;

(iii) $0 \leq \theta_i \leq s$ *pour tout* $i \in \{0,\dots,n\}$;

(iv) $\lambda(\theta_i+1) \leq u+1$ *pour tout* $i \in \{0,\dots,n\}$.

Supposons que $\deg_Y(P)$ *est petit par rapport à* $\deg_X(P)$ *; plus précisément*

$$s \leq \frac{\max\{n,1\}}{2}\delta(u+1). \tag{3.3}$$

Supposons aussi que les projections $\pi_j|_S$ de S vers les axes de coordonnées sont injectives pour $j \in \{1,2\}$.

[1]. F. Dyson, « *The approximation to algebraic numbers by rationals* », Acta. Math., **79**:225–240, 1947.

Si P s'annule en (x_i, y_i) avec multiplicité $\Sigma(\lambda\theta_i, \theta_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, alors l'on a

$$\lambda \sum_{i=0}^{n} (1 + [\theta_i])(\theta_i - \frac{1}{2}[\theta_i]) \leq (1 + \frac{1}{2} n(n+1)\delta)(u+1)(s+1). \tag{3.4}$$

Voici ce que le lemme de Dyson dit. Le nombre de coefficients de $P \neq 0$ est $(u+1)(s+1) \sim us$. Le nombre de conditions imposées sur P par l'hypothèse de son annulation en S (P s'annule en (x_i, y_i) avec multiplicité $\Sigma(\lambda\theta_0, \theta_0)$) est approximativement le membre à gauche de (3.4). *Lorsque u/s est assez grand* tel que le facteur $1 + (1/2)n(n+1)\delta$ est assez proche à 1, alors (3.4) nous dit que P ne pourrait pas s'annuler en beaucoup de points avec grande multiplicité.

Remarque 3.8. *Avant d'esquisser la démonstration, regardons comment le lemme de Dyson se voit comme un cas particulier de l'injectivité d'un morphisme d'évaluation (Question 3.4). En effet, ici $X = \mathbb{G}_a^2$ avec plongement bi-projectif dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(u, s)$, et Y le lieu de zéro de P. Supposons que S est dans le support de Y et que la multiplicité de Y en chaque (x_i, y_i) est $\Sigma(\lambda\theta_i, \theta_i)$. Alors le lemme de Dyson ci-dessus dit que le morphisme d'évaluation est injectif, au cas où u/s est assez grand, si n est assez grand et que les multiplicités sont assez grandes (pour battre l'inégalité* (3.4)*).*

Le lemme de Dyson a été généralisé par Esnault et Viehweg, en résolvant une question de Bombieri, dans ≪ *Dyson's lemma for polynomials in several variables (and the theorem of Roth)* ≫, Invent. Math., **78**:445–490, 1990. Voir aussi la très jolie preuve de C. Viola ≪ *On Dyson's lemma* ≫, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze, **12**:105–135, 1985.

Démonstration du lemme de Dyson. Nous donnons l'esquisse de la démonstration du lemme de Dyson quitte à perdre un peu dans les constantes numériques près, c'est-à-dire $\sum_{i=0}^{n} \lambda\theta_i^n \ll us$. De plus nous nous restreignons au cas où $n = 0$. Bien que (3.4) soit triviale lorsque $n = 0$, l'esquisse suivante donne l'idée pour la démonstration du cas général.

Posons $\Sigma_2 = \Sigma(\lambda\theta_0, \theta_0)$ et

$$\Sigma_1 = \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{t_1}{\lambda\theta_0} + \frac{t_2}{\theta_0} \leq \frac{1}{2} \right\} \subseteq \Sigma_2.$$

Ensuite, posons

$$I_0 = (P), \quad I_1 = (\partial_{(t_1,t_2)} P : (t_1, t_2) \in \Sigma_1), \quad I_2 = (\partial_{(t_1,t_2)} P : (t_1, t_2) \in \Sigma_2),$$

et

$$Z_0 = V(I_0), \quad Z_1 = V(I_1), \quad Z_2 = V(I_2).$$

Alors $0 \subsetneq I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2$ et $\mathbb{A}^2 \supsetneq Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq Z_2$. Le sous-schéma Z_0 est Zariski fermé de dimension 1. Par l'hypothèse, le point (x_0, y_0) est dans le support de Z_2.

On procède selon $\dim_{(x_0,y_0)} Z_1$, qui est soit 0 soit 1.

$\boxed{\text{Cas } \dim_{(x_0,y_0)} Z_1 = 0}$ Dans ce cas-là, (x_0, y_0) est une composante isolée en commun de $|Z_1|$ et $|Z_2|$.

Pour tout $(t_1, t_2) \in \Sigma_1$ et tout polynôme $Q \in I_1$, l'on a $\partial_{(t_1,t_2)} Q \in I_2$. Donc la multiplicité de Z_1 en (x_0, y_0), notée $\mathrm{mult}_{(x_0,y_0)} Z_1$, est au moins $\#\Sigma_1$ qui est approximativement $\lambda\theta_0^2/8$. Donc l'on a

$$\mathrm{mult}_{(x_0,y_0)} Z_1 \geq \lambda\theta_0^2/8. \tag{3.5}$$

Par ailleurs I_1 est engendré par des polynômes de multi-degré $\leq (u, s)$. Il existe deux polynômes dans I_1 dont le lieu de zéros commun est de dimension 0 en (x_0, y_0). L'on peut donc utiliser le théorème de Bézout multi-homogène pour obtenir

$$\mathrm{mult}_{(x_0,y_0)} Z_1 \leq 2us. \tag{3.6}$$

Maintenant (3.5) et (3.6) permettent de conclure $\lambda\theta_0^2 \ll us$.

$\boxed{\text{Cas } \dim_{(x_0,y_0)} Z_1 = 1}$ Dans ce cas-là, $|Z_0|$ et $|Z_1|$ ont une composante (isolée) en commun, notée Z, qui contient (x_0, y_0). Nous allons évaluer la multiplicité en Z, en séparant deux cas.

Le premier cas : les multi-degrés $d_1(Z)$ et $d_2(Z)$ sont tous les deux non nuls. Autrement dit la projection de Z vers chaque axe est à fibre finie. Maintenant, un calcul de multiplicité montre que $\mathrm{mult}_Z Z_0 \geq \lambda\theta_0$. L'on a $\mathrm{codim}_{\mathbb{A}^2} Z = 1$, donc $Z = V(Q)$ pour un polynôme (irréductible) Q. Maintenant, $\mathrm{mult}_Y Z_0 \geq \lambda\theta_0$ implique $Q^{\lambda\theta_0} | P$. En regarding les degrés partiels $\deg_Y$ de Q et de P, l'on a

$$\lambda\theta_0 \leq s. \tag{3.7}$$

Donc $\lambda\theta_0^2 \ll \delta us$ par la condition (iii) et (3.3).

Le deuxième cas : l'un des bi-degré de Y est nul. Donc Y est soit verticale (auquel cas $\mathrm{mult}_Y Z = \lambda\theta_0$) soit horizontale (auquel cas $\mathrm{mult}_Y Z = \theta_0$). Si Y est verticale, alors l'on a $\lambda\theta_0 \leq u$. Si Y est horizontale, alors l'on a $\theta_0 \leq s$. Nous pouvons conclure à l'aide de la condition (iii) ou (iv). □

3.3. **Lemme de zéros de Patrice Philippon : le contexte.** L'on donne maintenant un résultat plus général, qui est une des versions les plus abouties de lemmes de zéro. Voir aussi les travaux de Masser, Brownawell, Nesterenko, Wüstholz, Nakamaye, *etc.* [2] L'énoncé de P. Philippon qui sera donné dans cette sous-section, qui est une version plus générale, est tiré de ≪ *Nouveaux lemmes de zéros dans les groupe algébriques commutatifs* ≫, Rocky mountain journal of mathematics, **26**:1069–1088, 1995.

Soit G un groupe algébrique commutatif. Par exemple $G = \mathbb{G}_a^g$ est une puissance du groupe additif.

Supposons que G est plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}$ via un choix de sections globales d'un fibré en droites très ample $\mathcal{L}$. Supposons en plus que ce plongement projectif induit une compactification lisse, équivariante et projectivement normale. Cette dernière hypothèse permet d'assurer que l'addition peut être représentée par des polynômes de degré 2.

Posons T_G l'espace tangent à l'origine dont l'on choisit une base $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq g = \dim G}$.

[2]. L'on se réfère à l'exposé de D. Bertrand ≪ *Lemmes de zéros et nombres transcendants* ≫, séminaire Bourbaki, astérisque **145–146**, exposé 652:21–44, 1987. Ceci suffit pour les applications à la théorie de Baker.

3.3.1. Regardons maintenant ***les classes de dérivations*** (qui englobent les dérivations utilisées dans le lemme de Dyson).

Définition 3.9. *Soit $E \subseteq \mathbb{N}^g$.*

(i) E est appelé un ***escalier*** *si $a + \mathbb{N}^g \subseteq E$ pour tout $a \in E$;*

(ii) E est appelé un ***dessous d'escalier*** *s'il est le complémentaire d'un escalier.*

Il peut être vérifier qu'un escalier est une union finie de sous-ensembles de la forme $\{(e_1, \dots, e_g) \in \mathbb{N}^g : e_i \geq n_i\}$ pour un g-uplet $(n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{N}^g$.

Ces sont les dessous d'escalier qui nous intéressent.

Définition 3.10. *Un* ***ensemble pondéré*** *est un sous-ensemble Σ de $\mathbb{N}^g \times G$ tel que $\Sigma_\gamma = (\mathbb{N}^g \times \{\gamma\}) \cap \Sigma$ est un dessous d'escalier pour tout $\gamma \in G$.* [3]

Le ***support*** *de Σ est la projection de Σ vers G.*

En d'autre termes, en chaque point, l'on accepte des multiplicités éventuellement différentes, mais toujours sous la forme de dessous d'escalier. Regardons les exemples suivants pour mieux voir ce phénomène.

Exemple 3.11. *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme, alors beaucoup de dérivées de $P(X^2)$ s'annulent en 0, mais l'on ne peut pas en déduire que P est identiquement nul, mais seulement que P est une fonction paire. En effet, $\Sigma = \{(2k+1, 0) : 1 \leq k \leq \deg P - 1\}$ qui n'est évidemment pas un ensemble pondéré.*

Exemple 3.12. *Pourtant, l'ensemble d'annulation Σ dans le lemme de Dyson est un ensemble pondéré dans $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^2$. Le support de Σ est un nombre fini de points, et en chaque point les dérivées d'indice contrôlé s'annulent.*

Inspirés par ces exemples, l'on exprime l'ensemble d'annulation avec multiplicité en terme d'ensembles pondérés.

Définition 3.13. *Soient $P \in k[\mathbf{X}]$ un polynôme homogène et Σ un ensemble pondéré. L'on dit que P* ***s'annule sur*** *Σ si $\partial^t(P)|_\gamma = 0$ pour tout $(t, \gamma) \in \Sigma$.*

Avant de continuer, introduisons la notation suivante. Pour deux ensembles pondérés, posons

$$\Sigma + \Sigma' := \{(t + t', \gamma + \gamma') : (t, \gamma) \in \Sigma,\ (t', \gamma') \in \Sigma'\}$$

qui est encore un ensemble pondéré, avec la convention $\Sigma + \emptyset = \Sigma$.

3.3.2. Procédons au ***volume d'une sous-variété par rapport à un dessous-d'escalier***.

Définition 3.14. *Soient W un dessous d'escalier et $d \in [1, g]$ un entier.*

(i) Soit $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)$ un d-uplet avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq g$. Posons $\mathcal{C}_{\mathbf{i}}(W)$ l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}_+^d$ de la trace de $E := \mathbb{N}^g \setminus W$ sur la d-face de $\mathbb{N}^g$ définie par $\mathbf{i}$.

[3]. Une sous-variété algébrique V de G peut se voir comme un ensemble pondéré en s'identifiant à $\{0\} \times V$.

(ii) Soit V une sous-variété de G définie sur k de codimension d. [4] *Posons*

$$m_W(V) = d! \max_{\gamma\in V^{\mathrm{sm}},\ \mathbf{i}} \left\{ \mathrm{Vol}\left(\mathbb{R}^d_+ \setminus \mathcal{C}_{\mathbf{i}}(W) \right) \right\}, \tag{3.8}$$

où les d-uplets $\mathbf{i}$ *concernés dans le maximum satisfont la propriété suivante. L'espace vectoriel engendré par les dérivations $\partial_{i_1}, \dots, \partial_{i_d}$ est un complément de $T_\gamma V$ dans $T_\gamma G$ (rappelons que nous avons fixé une base de $T_G = T_0 G$, et donc par translation nous obtenons une base de $T_\gamma G$ pour chaque $\gamma \in G$).*

Bien entendu, le volume dans (3.8) est pris pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Exemple 3.15. *La situation du lemme de Dyson est comme suit. L'on a $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^g$. Posons $W = \{\mathbf{t} : \sum_{i=1}^g (t_i/\theta_i) < 1\}$, qui est un dessous escalier.*

Si V est de dimension 0 *(donc codimension g), alors $m_W(V) = g!\theta_1 \cdots \theta_g$.*

Si par contre V est de codimension $d \geq 1$, alors

$$m_W(V) = d! \max_{(i_1,\dots,i_d)} \{\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_d}\}$$

où le maximum est pris sur tous les d-uplets pour lesquels les d dérivations de la base associée engendrent un complément du tangent de V dans G.

L'on voit apparaître la discussion dans l'esquisse de la preuve de Dyson pour éliminer les cas dégénérés (situations verticale et horizontale).

3.4. **Lemme de zéros de Patrice Philippon : les énoncés.** Nous sommes prêts de donner l'énoncé du lemme de zéros de Philippon. Nous en donnerons aussi plusieurs variantes, y compris la version multi-homogène.

Soit G un groupe algébrique commutatif de dimension g plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}$ comme dans le but de la sous-section §3.3.

Si X est une sous-variété de G, notons G_X son stabilisateur $G_X = \{u \in G : u + X = X\}$.

Théorème 3.16 (Lemme de zéros de Philippon)**.** *Soit V une sous-variété algébrique irréductible de G. Soient $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{\operatorname{codim} V}$ des ensembles pondérés finis dont les supports contiennent l'origine.*

Soit P une forme homogène non identiquement nulle de degré δ. Supposons que P s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V}$.

Alors il existe un entier $r \in [1, \operatorname{codim} V]$ et une sous-variété irréductible X

(i) de dimension $d \leq g - r$;

(ii) contenant $\gamma + V$ pour au moins un élément $\gamma \in \mathrm{Supp}(\Sigma_{r+1} + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V})$;

(iii) incomplètement définie par des équations de degré $\leq 2\delta$,

telles que

$$\sum_{\gamma\in(\mathrm{Supp}(\Sigma_r)+G_X)/G_X} m_\gamma(X) \deg(X) \leq 2^g \deg(G) \delta^{\operatorname{codim} X}, \tag{3.9}$$

où $m_\gamma(X) = \max\{m_{(\Sigma_r)_{\gamma'}}(X) : \gamma - \gamma' \in G_X\}$.

De plus, l'on peut assurer que P s'annule sur $X + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$.

[4]. L'on peut supposer que k est algébriquement clos, mais ce n'est pas un souci à ce stade.

Le facteur 2^g dans le membre à droite de l'inégalité (3.9) apparaît parce que l'addition dans G est définie par des polynômes de degré au plus 2. Si $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^n$, alors ce facteur peut être supprimé.

Remarque 3.17. *Il existe aussi* ***une inégalité pour la hauteur*** *pour le lemme de zéros de Philippon, en remplaçant (pour la même X !)* $\deg(X)$ *dans* (3.9) *par* $h(X)$ *et le membre à droite de* (3.9) *par*

$$2^{g+1}\Big(h(G)\delta^{\operatorname{codim} X} + g\left(h(P) + c'\delta\eta + \log(\deg G + 1)\right)\deg(G)\delta^{\operatorname{codim} X - 1}\Big) \tag{3.10}$$

où η *est la hauteur de* $\operatorname{Supp}(\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{r-1})$ *et* c' *est un réel positif qui dépend des formules représentant l'addition sur* G*. Nous nous référons à l'article de Philippon pour* (3.10)*.*

Remarque 3.18. *Théorème 3.16 s'applique également aux sous-variétés V non-irréductibles. Plus précisément soient* $V^{(1)}, \dots, V^{(m)}$ *les composantes irréductibles de* V*, et* $\Sigma_0^{(j)}, \dots, \Sigma_{\operatorname{codim} V^{(j)}}^{(j)}$ *des ensembles pondérés finis dont les supports contiennent l'origine. Soit* P *une forme homogène non identiquement nulle de degré* δ*. Supposons que* P *s'annule sur* $V^{(j)} + \Sigma_0^{(j)} + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V^{(j)}}^{(j)}$ *pour chaque* $j \in \{1, \dots, m\}$*.*

Pour chaque $j \in \{1, \dots, m\}$*, Théorème 3.16 donne une* $X^{(j)}$ *et ainsi une inégalité* (3.9)*. L'on peut faire une addition simple pour obtenir une autre inégalité.*

Mais mieux, la démonstration de (3.9) *donne une inégalité plus forte qu'une simple addition ! En effet l'on a*

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\gamma \in (\operatorname{Supp}(\Sigma_r) + G_{X^{(j)}})/G_{X^{(j)}}} m_\gamma(X^{(j)}) \deg(X^{(j)})) \leq 2^g \deg(G) \sum_{l=1}^{g} \lambda_l \delta^l \leq 2^g \deg(G) \sum_{l=1}^{g} \delta^l \tag{3.11}$$

où $\lambda_l = \begin{cases} 1 & \textit{si } l = \operatorname{codim} X^{(j)} \textit{ pour un } j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$*. Ici le point important est que du côté gauche nous pouvons avoir un nombre fini quelconque de composantes irréductibles, mais du côté droit la somme est toujours contrôlée indépendamment du nombre de composantes irréductibles !*

Cette observation est importante pour l'application du Théorème 3.16 au lemme de Dyson.

Exemple 3.19. *Voici comment le Théorème 3.16 s'applique au lemme de Dyson. Il faut utiliser plutôt le renforcement donné dans la Remarque 3.18. Posons* $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^2$ *et* $V = S = \{(x_i, y_i)\}_{0 \leq i \leq n}$ *l'ensemble fini de points considéré dans le lemme de Dyson (et donc* $V_i = \{(x_i, y_i)\}$*). Pour les ensembles pondérés* $\Sigma_0^{(i)}, \Sigma_1^{(i)}, \Sigma_2^{(i)}$*, posons* $\Sigma_0^{(i)} = \{(0,0)\} \times \{0\} \in \mathbb{N}^2 \times G$*, et*

$$\Sigma_1^{(i)} = \Sigma_2^{(i)} = \Sigma(\lambda\theta_i/2, \theta_i/2) \times \{(0,0)\},$$

où $\Sigma(\lambda\theta_i/2, \theta_i/2)$ *est défini par* (3.2)*. Alors*

$$V^{(i)} + \Sigma_0^{(i)} + \Sigma_1^{(i)} + \Sigma_2^{(i)} = \Sigma(\lambda\theta_i, \theta_i) \times \{(x_i, y_i)\}.$$

Donc P *s'annule sur* $V^{(i)} + \Sigma_0^{(i)} + \Sigma_1^{(i)} + \Sigma_2^{(i)}$ *si et seulement si* P *s'annule en* (x_i, y_i) *avec multiplicité* $\Sigma(\lambda\theta_i, \theta_i)$*.*

Voir l'Exemple 3.15 pour $m_\gamma(X)$. Remarquons que le terme 2^g du côté droit du (3.11) *peut être supprimé puisque l'addition est définie par des polynôme de degré* 1 *dans ce cas-là.*

Pourtant, le lemme de Dyson est multi-homogène (l'hypothèse que $s/u \ll 1$ est très importante !). Donc l'on a besoin d'une version multi-homogène du lemme de zéros de Philippon.

En effet, le Théorème 3.16 implique une version multi-homogène facilement.

Théorème 3.20 (Lemme de zéros de Philippon, version multi-homogène)**.** *Soit $G = G_1 \times \cdots \times G_p$ un produit direct de groupes algébriques commutatifs, avec chaque G_i plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}_i$ (toujours compactification lisse équivariante projectivement normale). Ainsi G est plongé dans $\mathbb{P}_1 \times \cdots \mathbb{P}_p$.*

Soit V une sous-variété algébrique irréductible de G. Soient $\Sigma_0, \ldots, \Sigma_{\operatorname{codim} V}$ des ensembles pondérés finis dont les supports contiennent l'origine.

Soit P une forme multi-homogène non identiquement nulle de multi-degré $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$. Supposons que P s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V}$.

Alors il existe un entier $r \in [1, \operatorname{codim} V]$ et une sous-variété irréductible X

(i) de dimension $d \le g - r$;

(ii) contenant $\gamma + V$ pour au moins un élément $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_{r+1} + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V})$;

(iii) incomplètement définie par des équations de degré $\le 2\delta$,

telles que

$$\sum_{\gamma \in (\operatorname{Supp}(\Sigma_r) + G_X)/G_X} m_\gamma(X) H_{\mathrm{g}}(X; \delta_1, \ldots, \delta_p) \le H_{\mathrm{g}}(G; 2\delta_1, \ldots, 2\delta_p). \tag{3.12}$$

Ici $H_{\mathrm{g}}(X; \cdot)$ est $(\dim X)!$ fois le terme de plus haut degré du polynôme de Hilbert–Samuel multi-homogène de X. Pareil pour $H_{\mathrm{g}}(G; \cdot)$.

De plus, l'on peut assurer que P s'annule sur $X + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$.

Démonstration du Théorème 3.20 par le Théorème 3.16. Considérons le morphisme de Segre–Veronese

$$\varphi \colon \mathbb{P}_1 \times \cdots \mathbb{P}_p \hookrightarrow \mathbb{P}, \quad (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p) \mapsto (\ldots : \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}} : \ldots)|_{\boldsymbol{\alpha}_i = \delta_i}.$$

Alors une forme multi-homogène de multi-degré $(\delta_1, \ldots, \delta_p)$ sur $\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_p$ devient une forme linéaire sur $\mathbb{P}$.

Pour chaque sous-variété Y de $\mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_p$, le degré de $\varphi(Y)$ est alors $H_{\mathrm{g}}(Y; \delta_1, \ldots, \delta_p)$.

Il suffit alors d'appliquer le Théorème 3.16 à $\varphi(V)$ pour conclure. $\square$

Comme expliqué dans la Remarque 3.18, Théorème 3.20 s'applique aussi aux V non-irréductibles dont les composantes irréductibles notées $V^{(1)}, \ldots, V^{(m)}$, et l'on obtient une inégalité

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\gamma \in (\operatorname{Supp}(\Sigma_r) + G_{X^{(j)}})/G_{X^{(j)}}} m_\gamma(X^{(j)}) \deg(X^{(j)})) \le g H_{\mathrm{g}}(G; 2\delta_1, \ldots, 2\delta_p). \tag{3.13}$$

3.5. **Lemme de zéros de Patrice Philippon : la démonstration.** Le but de cette sous-section est de donner la démonstration du lemme de Philippon, soit le Théorème 3.16.

3.5.1. Soient Σ un ensemble pondéré et I un idéal, notons

$$\Delta^{\Sigma}(I) = \left(\partial^{\mathbf{t}} \circ \tau_\gamma(Q) : (\mathbf{t},\gamma) \in \Sigma,\ Q \in I\right).$$

Posons $I_0 = (P)$, et pour $i \geq 1$

$$I_i = \Delta^{\Sigma_0+\cdots+\Sigma_{i-1}}(P) = \left(\partial^{\mathbf{t}} \circ \tau_\gamma(P) : (\mathbf{t},\gamma) \in \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{i-1}\right).$$

Rappelons de notre hypothèse que l'origine de G est dans $\operatorname{supp}(\Sigma_i)$ pour chaque i. Donc l'on a

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_{\operatorname{codim} V+1} \subseteq I(V). \tag{3.14}$$

Considérons les composantes de $V(I_i)$ qui contiennent $\gamma + V$ pour un $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_i + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V})$. Posons Z_i l'union de telles composantes de dimension maximale (donc nécessairement isolées), et $d_i = \dim Z_i$. Alors (3.14) implique

$$g - 1 \geq d_0 \geq d_1 \geq \cdots \geq d_{\operatorname{codim} V+1} \geq \dim V = g - \operatorname{codim} V. \tag{3.15}$$

Il existe donc un entier $r \in [1, \operatorname{codim} V]$ tel que $d_r = d_{r+1}$, minimal pour cette condition. Donc $d_r = d_{r+1} \leq g - r$.

Ceci implique qu'il existe une variété X qui est une composante isolée de dimension maximale (égale à d_r) commune de $V(I_r)$ et $V(I_{r+1})$ telle que X contienne $\gamma + V$ pour un certain $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_{r+1} + \cdots + \Sigma_{\operatorname{codim} V})$. Ceci démontre (i) et (ii).

Et (iii) est vraie parce que l'addition dans G est définie par des polynômes de degré au plus 2.

Puisque $X \subseteq V(I_{r+1})$, P s'annule sur $X + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$, d'où la partie « De plus » du théorème.

Il reste à démontrer l'inégalité (3.9). Nous voulons utiliser Lemme 3.23 (combiné avec le Lemme 3.22).

Tout d'abord, I_r est un idéal engendré par des formes de degré $\leq \delta$, et $\operatorname{codim} V(I_r) = g - d_r$.

Ensuite, regardons les idéaux premiers associés minimaux de I_r de codimension $g - d_r$. Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal premier définissant X. Alors $\mathfrak{p}$ est un tel idéal.

Il peut être vérifié que $\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}$ est aussi un idéal associé minimal de I_r pour tout $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_r)$. En effet, pour tout $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_r)$, l'on a $\gamma + X \subseteq V(I_r)$ parce que $X \subseteq V(I_{r+1})$ et $0 \in \operatorname{Supp}(\Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{r-1})$. Donc $\gamma + X$ est une composante de dimension maximale (et donc isolée) de $V(I_r)$ pour tout $\gamma \in \operatorname{Supp}(\Sigma_r)$. Donc $\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}$ est un idéal associé minimal de I_r.

Nous sommes donc prêts d'appliquer Lemme 3.23. Remarquons que lorsque γ parcourt $(\operatorname{Supp}(\Sigma_r) + G_X)/G_X$, les variétés $V(\tau_{-\gamma}\mathfrak{p})$ sont deux à deux distinctes. En plus, leurs degrés sont au moins $2^{-d_r}\deg(X)$. Donc Lemme 3.23 implique

$$\sum_{\gamma \in (\operatorname{Supp}(\Sigma_r)+G_X)/G_X} \max_{\gamma' \in \operatorname{Supp}(\Sigma_r) \cap (\gamma + G_X)} \{e_{I_r A_{\tau_{-\gamma'}\mathfrak{p}}}(A_{\tau_{-\gamma'}\mathfrak{p}})\} \cdot 2^{-d_r} \deg(X) \leq \deg(G)(2\delta)^{g-d_r}.$$

À ce stade, nous pouvons voir pourquoi cette démonstration implique également la plus forte inégalité (3.11). En effet si V n'est pas irréductible, alors nous pouvons faire les même arguments avec chaque composante $V^{(j)}$ de V et arriver à cette étape. Mais au lieu d'appliquer Lemme 3.23 à chaque I_{r_j} et $\mathfrak{p}_j$ ainsi obtenus, nous faisons une autre opération comme suit. Pour chaque $r \in [1, g]$, posons $I_r = \prod_{r_j = r} I_{r_j}$. Alors pour tout j avec $r_j = r$,

$\mathfrak{p}_j$ reste tout de même un idéal associé minimal de I_r. Appliquant Lemme 3.23 à I_r et faisant la somme sur r, l'on voit que le côté droit reste inchangé bien que du côté gauche l'on fasse une somme supplémentaire sum les composantes irréductibles de V.

Pour conclure, il suffit donc de démontrer $e_{I_r A_{\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}}}(A_{\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}}) \geq m_{(\Sigma_r)_\gamma}(X)$ pour tout γ. Pour ce faire, nous allons appliquer Lemme 3.22. Il suffit de vérifier que

$$\partial^{\mathbf{t}} I \subseteq \tau_{-\gamma}\mathfrak{p} \quad \text{pour tout } \mathbf{t} \in (\Sigma_r)_\gamma \text{ et tout } \gamma \in \mathrm{Supp}(\Sigma_r). \tag{3.16}$$

Mais (3.16) est équivalent à $\Delta^{(\Sigma_r)_\gamma \times \{0\}}(I_r) \subseteq \tau_{-\gamma}\mathfrak{p}$ pour tout $\gamma \in \mathrm{Supp}(\Sigma_r)$. Ce dernier est vrai : $V(\mathfrak{p}) = X$ est une composante maximale de $V(I_{r+1})$, et donc $\Delta^{\Sigma_r}(I_r) \subseteq \mathfrak{p}$, d'où les inclusions voulues.

3.5.2. *Préparatifs en algèbre commutative.* Nous nous référons à ≪ Algèbre Commutative ≫ de Bourbaki pour les préparatifs.

Tout d'abord la définition de la multiplicité. Soient R un anneau noethérien, J un idéal, et M un R-module de type fini avec $\dim M = d$. La *multiplicité de Samuel de M relativement à J* est

$$e_J(M) = d! \lim_{l\to\infty} \frac{l_R(M/J^l M)}{l^d}.$$

En particulier, si R est local et J est primaire, alors $e_J(R)$ est la multiplicité de J.

La multiplicité vérifie toutes sortes de propriétés élémentaires. Par exemple $J \subseteq J'$ entraîne $e_{J'}(M) \leq e_J(M)$; si R est local régulier et J est l'idéal maximal de R, alors $e_J(R) = 1$ et $e_{J^l}(R) = l^{\dim R}$.

Le lemme suivant se déduit des exercices du chapitre 8 de ≪ Algèbre Commutative ≫ de Bourbaki.

Lemme 3.21. *Soient W un ensemble fini de $\mathbb{N}^d$, I_W l'idéal de $R = k[[T_1, \dots, T_d]]$ engendré par les monôme $\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ parcourant $\mathbb{N}^d \setminus W$. Alors*

$$e_{I_W}(R) = d!\mathrm{vol}(\mathbb{R}_+^d \setminus \mathcal{C})$$

où $\mathcal{C}$ est l'enveloppe convexe de $\mathbb{N}^d \setminus W$ dans $\mathbb{R}_+^d$ et le volume est pris par rapport à la mesure de Lebesgue.

À partir de ce lemme et faisant une analyse locale en un point de X suffisamment générale, l'on peut démontrer le lemme suivant. Retournons dans la situation du lemme de zéros de Philippon. Donc G est un groupe algébrique commutatif plongé dans un espace projectif $\mathbb{P}$.

Posons $\mathfrak{g}$ l'idéal définissant $\overline{G}$ dans $\mathbb{P}$, et $A = k[\mathbf{X}]/\mathfrak{g}$.

Lemme 3.22. *Soient I un idéal homogène de A et $\mathfrak{p}$ un idéal premier associé de I minimal. Notons $X = V(\mathfrak{p}) \subseteq G$.*

Soit W un dessous d'escalier fini de $\mathbb{N}^g$. Supposons que $\partial^{\mathbf{t}} I \subseteq \mathfrak{p}$ pour tout $\mathbf{t} \in W$. Alors

$$e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \geq m_W(X). \tag{3.17}$$

Lemme 3.23. *Soit I un idéal de A engendré par des formes de degré $\leq \delta$. Prenons un entier $r \geq \operatorname{codim} V(I)$. Alors*

$$\sum_{\mathfrak{p},\ \operatorname{codim}(\mathfrak{p})=r} e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \deg(\mathfrak{p}) \leq \deg(\mathfrak{g})\delta^r, \tag{3.18}$$

où la somme porte sur les idéaux associés correspondant aux composantes isolées de $V(I)$ (et donc ces idéaux associés sont forcément minimaux).

3.6. **Lemme de Roth et le théorème du produit de Faltings : énoncés.** Nous donnons les énoncés du lemme de Roth et du théorème du produit de Faltings dans cette sous-section.

Dans ces deux énoncés, une hypothèse arithmétique (sur la hauteur des points des supports des ensembles pondérés introduits) est introduite. Commençons par quelques exemples simples pour comprendre pourquoi ces hypothèses sont également parfaitement naturelles.

Soient $P \in \overline{\mathbb{Q}}[x]$ un polynôme non constant de degré d et $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ ses racines. La ***mesure de Mahler*** est définie comme

$$\log(M(P)) = \sum_{i=1}^{d} h(\alpha_i).$$

La hauteur de Weil du polynôme est

$$h(P) = h([a_0 : \cdots : a_d]),$$

où les a_i sont les coefficients de P. Il est classique qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\left| \frac{\log(M(P))}{d} - h(P) \right| \leq cd. \tag{3.19}$$

Exemple 3.24. *(i) Soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$. Si $h(\alpha) \geq cd + h(P)$, alors $P(\alpha) \neq 0$.*

(ii) Soit $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X, Y]$ non constant. Alors il existe un point $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{Q}}^2$ de hauteur arbitrairement grande tel que $P(\alpha, \beta) = 0$.

Procédons aux deux énoncés dans le titre de la sous-section.

Théorème 3.25 (Lemme de Roth). *Soient $m \geq 1$ un entier et $P \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_m]$ un polynôme non constant de degrés partiels $\deg_{X_i} P \leq \delta_i$. Soit $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ un point de $\overline{\mathbb{Q}}^m$. Soit $\epsilon \in]0, 1/2[$ un nombre réel tel que pour tout $1 \leq i \leq m - 1$, l'on ait*

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} \leq \epsilon^{2^{m-1}}. \tag{3.20}$$

Supposons en plus que

$$\epsilon^{2^{m-1}} \min_{1 \leq i \leq m} \{\delta_i h(\beta_i)\} \geq h(P) + 2m\delta_1. \tag{3.21}$$

Alors l'indice de P par rapport à $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})$ satisfait

$$\mathrm{Ind}_{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})}(P) \leq 2m\epsilon. \tag{3.22}$$

Rappelons que $\mathrm{Ind}_{(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta})}(P)$ est défini comme

$$\min \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{i_k}{\delta_k} : \partial_{i_1 \ldots i_m} P(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0 \right\}.$$

Passons maintenant au théorème du produit de Faltings. Dans sa version originale, nous nous référons à G. Faltings « *Diophantine approximation on abelian varieties* », Ann. Math., **133**:549–576, 1991. Dans une version effective, nous nous référons à G. Rémond « *Sur le théorème du produit* », J. de Théorie des nombres de Bordeaux, **13**:287–302, 2001.

L'on se place dans un espace multi-projectif $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n_m}$.

Soit P une forme multi-homogène de multi-degré $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$.

Si $\sigma \geq 0$ est un nombre réel, l'on note Z_σ le lieu des zéros de l'idéal $(\partial^{\boldsymbol{\kappa}}(P))$ où $\boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{\kappa}_1, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_m)$ parcourt l'ensemble des multi-indices vérifiant $\sum_{i=1}^m \frac{|\boldsymbol{\kappa}_i|}{\delta_i} \leq \sigma$. L'on note $n = n_1 + \cdots + n_m$.

Théorème 3.26 (Théorème du produit de Faltings)**.** *Supposons que le corps de base est un corps de nombres. Soient $\epsilon > 0$ et Z une composante irréductible commune de $Z_{\sigma+n\epsilon}$ et Z_σ.*[5]

Posons $r = \max\left\{1, (\frac{m}{\epsilon})^{\operatorname{codim} Z}\right\}$ et supposons que $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ vérifie $\delta_i/\delta_{i+1} \geq r$. Alors

(i) Z est une composante irréductible d'un produit $Z_1 \times \cdots \times Z_m$, où $Z_i \subseteq \mathbb{P}^{n_i}$;

(ii) Si l'on note N le nombre de composantes irréductibles de ce produit, alors

$$\prod_{i=1}^{m} \deg(Z_i) \leq \left(\frac{m}{\epsilon}\right)^{\operatorname{codim} Z} N; \tag{3.23}$$

(iii) Pour tout i tel que $Z_i \neq \mathbb{P}^{n_i}$, l'on a

$$\left(\prod_{j\neq i} \deg(Z_j)\right) \delta_i h(Z_i) \leq \operatorname{codim}(Z_i) \left(\frac{m}{\epsilon}\right)^{\operatorname{codim} Z} N \cdot (h(P) + O(|\boldsymbol{\delta}|)). \tag{3.24}$$

3.7. **Lemme de Roth et le théorème du produit de Faltings : démonstrations.**

Démonstration du lemme de Roth (Théorème 3.25). Nous utilisons le lemme de zéros de Philippon (version homogène), soit le Théorème 3.20, pour démontrer le lemme de Roth.

Supposons que $\operatorname{Ind}_{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})}(P) > 2m\epsilon$.

Appliquons Théorème 3.20 à la situation suivante : $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$, $V = \{\boldsymbol{\beta}\}$, $\Sigma_0 = \{(0,0)\}$ et $\Sigma_i = W \times \{0\}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Ici $W = \Sigma(\boldsymbol{\beta}, \epsilon) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{N}^m : \sum_{j=1}^m (t_j/\beta_j) \leq \epsilon\}$. Alors P s'annule sur $V + \Sigma_0 + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_m$ car $\operatorname{Ind}_{(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta})}(P) > 2m\epsilon$. Donc il existe une sous-variété X de $(\mathbb{P}^1)^m$ de dimension $d < g$ contenant $\boldsymbol{\beta}$ telle que

$$m_W(X) d! \sum_{\mathbf{l}\in\{0,1\}^m,\ |\mathbf{l}|=d} \deg_{\mathbf{l}}(X) \delta_1^{l_1} \cdots \delta_m^{l_m} \leq m! \delta_1 \cdots \delta_m. \tag{3.25}$$

Remarquons que nous n'avons pas besoin de supposer qu'aucune des droites projectives $\mathbb{P}^1$ n'est facteur de X car sinon $X = \mathbb{P}^1 \times X_1$ et il suffit de raisonner sur X_1 (les multiplicités, degrés, hauteurs sont inchangées).

Il reste à analyser (3.25). L'on sépare en deux cas.

L'idée principale est de ***choisir deux multi-indices pour évaluer favorablement*** $\sum_{\mathbf{l}\in\{0,1\}^m,\ |\mathbf{l}|=d} \deg_{\mathbf{l}}(X) \delta_1^{l_1} \cdots \delta_m^{l_m}$ d'une part et $m_W(X)$ d'autre part.

---

[5]. Par « irréductible » nous voulons toujours dire « géométriquement irréductible ».

(Cas 1) Le premier cas « général » est celui où la projection vers l'i-ème facteur donne $\pi_i(X) = \mathbb{P}^1$ pour tout $1 \leq i \leq m$. En particulier $d \geq 1$.

L'on peut donc choisir deux multi-indices $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ satisfaisant
— $|\mathbf{l}| = |\mathbf{l}'| = d$;
— $l_1 = 1$, $l'_1 = 0$;
— $l_k = l'_k$ pour tout $2 \leq k \leq m-1$;
— $l_m = 0$, $l'_m = 1$;
— $\deg_{\mathbf{l}}(X) \neq 0$ et $\deg_{\mathbf{l}'}(X) \neq 0$.

L'on se sert de l'indice $\mathbf{l}'$ pour estimer la multiplicité : le sous-espace de $\mathbb{C}^m$ engendré par les facteurs de $\mathbf{l}'$ est un complément de T_yX dans $T_y\mathbb{C}^m$ pour un point y assez général de X. Donc par l'Exemple 3.15, l'on a

$$m_W(X) \geq \frac{\epsilon^{m-d} \prod_{j=1}^m \delta_j}{\prod_{j=1}^m \delta_j^{l'_j}}.$$

Par ailleurs, $\deg_{\mathbf{l}}(X) \neq 0$ implique

$$\sum_{\mathbf{k} \in \{0,1\}^m,\ |\mathbf{k}|=d} \deg_{\mathbf{k}}(X) \delta_1^{k_1} \cdots \delta_m^{k_m} \geq \delta_1^{l_1} \cdots \delta_m^{l_m}.$$

Ces deux inégalités impliquent

$$m_W(X) d! \sum_{\mathbf{l} \in \{0,1\}^m,\ |\mathbf{l}|=d} \deg_{\mathbf{l}}(X) \delta_1^{l_1} \cdots \delta_m^{l_m} \geq d! \frac{\epsilon^{m-d} \prod_{j=1}^m \delta_j \prod_{j=1}^m \delta_j^{l_j}}{\prod_{j=1}^m \delta_j^{l'_j}} = d! \frac{\epsilon^{m-d} (\prod_{j=1}^m \delta_j) \delta_1}{\delta_m}.$$

Donc l'on a, par (3.25),

$$d! \frac{\epsilon^{m-d} (\prod_{j=1}^m \delta_j) \delta_1}{\delta_m} \leq m! \delta_1 \cdots \delta_m,$$

d'où

$$\frac{\delta_m}{\delta_1} \geq \frac{m!}{d!} \epsilon^{m-d} = (\epsilon(d+1)) \cdots (\epsilon m).$$

Pourtant, ceci est est contradictoire à l'hypothèse $\delta_{i+1}/\delta_i \leq \epsilon^{2^{m-1}}$ et $0 < \epsilon < 1/2$.

En résumé, le cas général ne pourrait pas arriver.

(Cas 2) Dans ce cas-là, il existe un indice $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\dim \pi_i(X) = 0$.

Prenons alors un multi-indice $\mathbf{l}$ tel que $|\mathbf{l}| = d$, $l_i = 0$ et $\deg_{\mathbf{l}}(X) \neq 0$.

Comme le cas précédent, en un point y assez général de X, le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^m$ engendré par les facteurs de $\mathbf{l}$ est un complément de T_yX dans $T_y\mathbb{C}^m$. Donc par l'Exemple 3.15, l'on a

$$m_W(X) \geq \frac{\epsilon^{m-d} \prod_{j=1}^m \delta_j}{\prod_{j=1}^m \delta_j^{l_j}}. \tag{3.26}$$

À ce stade, l'on a besoin de l'information arithmétique pour terminer la démonstration. Plus précisément, il faut remplacer le degré dans (3.25) par la hauteur.

Pour ce faire, il faut appliquer le lemme de zéros de Philippon, mais *l'inégalité pour la hauteur* ; voir la Remarque 3.17. Dans notre cas (le groupe additif $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^m$, multi-homogène) l'on a

$$m_W(X)(d+1)! \sum_{\mathbf{l}\in\{0,1\}^m,\ |\mathbf{l}|=d+1} h_{\mathbf{l}}(X)\delta_1^{l_1}\cdots\delta_m^{l_m} \leq (m+1)!(h(P)+\delta_1+\cdots+\delta_m)\delta_1\cdots\delta_m. \tag{3.27}$$

Prenons l'indice $\mathbf{l}'$ qui satisfait $l'_k = l_k$ pour tout $k \neq i$ et $l'_i = 1$. Alors $|\mathbf{l}'| = d+1$. De plus, puisque X est verticale au dessus de l'i-ème facteur, l'on a tout simplement $h_{\mathbf{l}'}(X) = h(\pi_i(X))\deg_{\mathbf{l}}(X)$.

Finalement l'on a

$$\sum_{\mathbf{k}\in\{0,1\}^m,\ |\mathbf{k}|=d+1} h_{\mathbf{k}}(X)\delta_1^{k_1}\cdots\delta_m^{k_m} \geq h(\beta_i)\delta_1^{l'_1}\cdots\delta_m^{l'_m} \tag{3.28}$$

parce que $h(\pi_i(X)) \geq h(\beta_i)$ (car X passe par $\boldsymbol{\beta}$ et $\dim\pi_i(X) = 0$).

Nous obtenons alors, en mettant (3.26), (3.28) et (3.27) ensemble,

$$\epsilon^{m-d}(d+1)!\delta_i h(\beta_i) \leq (m+1)!(h(P)+\delta_1+\ldots+\delta_m).$$

Ceci donne une contradiction à l'hypothèse (3.21) du Lemme de Roth. □

Démonstration du théorème du produit de Faltings (Théorème 3.26). Nous allons appliquer le lemme de zéros de Philippon (version multi-homogène), soit le Théorème 3.20, pour (i) et (ii). Pour (iii) il faut de plus utiliser le supplément arithmétique (l'analogue de la Remarque 3.17).

Dans notre cas, $G = \mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{n_m}$, $V = Z$, et $\Sigma_0 = W_\sigma \times \{0\}$ et $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_{\operatorname{codim} Z} = W \times \{0\}$, où

$$W_\sigma = W(\boldsymbol{\delta},\sigma) = \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N}^{n_1+\cdots n_m} : \sum_{i=1}^m \frac{|\mathbf{t}_i|}{\delta_i} < \sigma \right\}$$

et

$$W = W(\boldsymbol{\delta},\epsilon) = \left\{ \mathbf{t} \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N}^{n_1+\cdots n_m} : \sum_{i=1}^m \frac{|\mathbf{t}_i|}{\delta_i} < \epsilon \right\}.$$

Alors P s'annule sur $V+\Sigma_0+\cdots+\Sigma_{\operatorname{codim} Z}$ car $Z \subseteq Z_{\sigma+n\epsilon}$.

Le lemme de zéros de Philippon s'applique et induit qu'il existe une sous-variété X de $\mathbb{P}$ de dimension $d < g$ telle que

$$m_W(X)H_{\mathrm{g}}(X;\boldsymbol{\delta}) \leq H_{\mathrm{g}}(\mathbb{P};\boldsymbol{\delta}) \tag{3.29}$$

avec

$$H_{\mathrm{g}}(X;\boldsymbol{\delta}) = (\dim X)! \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^m,\ |\boldsymbol{\alpha}|=\dim X} \deg_{\boldsymbol{\alpha}}(X)\frac{\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_m^{\alpha_m}}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!}.$$

Pour simplifier, supposons ici que le corps de base est algébriquement clos (et donc X est irréductible, $N = 1$, *etc.*).

Les propriétés supplémentaires de X nous assure que X est un translaté de Z. En effet $X \supseteq Z$ car le support de chaque Σ_i est $\{0\}$, et $X \subseteq Z_{\sigma+n\epsilon}$ car P s'annule sur $X+\Sigma_0+\Sigma_1+\cdots+\Sigma_s$ pour un $s \in [1, \operatorname{codim} Z]$. Donc $Z \subseteq X \subseteq Z_{\sigma+n\epsilon}$. Et donc $X = Z$ car Z est une composante irréductible de $Z_{\sigma+n\epsilon}$ et X elle-même est irréductible.

(i) Prouvons (i), *i.e.* X est une variété produit. Sinon prenons un point $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in X$ et considérons

$$Y_i = X \cap (\{x_1\} \times \cdots \times \{x_{i-1}\} \times \mathbb{P}^{n_i} \times \{x_{i+1}\} \times \cdots \times \{x_m\}).$$

Alors il existe un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$\dim \pi_i(X) > \dim Y_i \tag{3.30}$$

où π_i est la projection vers l'i-ème facteur.

Choisissons maintenant i minimal pour cette propriété (3.30).

Comme dans la preuve du lemme de Roth, il ne reste plus qu'à choisir deux multi-indices $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ pour évaluer favorablement $H_{\mathrm{g}}(X; \boldsymbol{\delta})$ d'une part et $m_W(X)$ d'autre part.

Commençons par $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $|\boldsymbol{\alpha}| = \dim X$. Prenons $\alpha_1 = \dim \pi_1(X), \dots, \alpha_i = \dim \pi_i(X)$ et complétons-les par $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m$ de telle sorte que $\deg_{\boldsymbol{\alpha}}(X) \neq 0$. Ceci est possible puisqu'aucun des α_j ne dépasse $\dim \pi_j(X)$.[6] Parmi tous les choix possibles, prenons le multi-indice minimal pour l'ordre lexicographique.

Nous avons ainsi la minoration

$$H_{\mathrm{g}}(X; \boldsymbol{\delta}) \geq \prod_{j=1}^{m} \delta_j^{\alpha_j} = \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{3.31}$$

Maintenant nous passons à l'évaluation de la multiplicité. Choisissons $\boldsymbol{\beta}$ de la manière suivante : pour $j \in \{1, \dots, i\}$, posons

$$\beta_j = n_j - \dim Y_j.$$

Complétons-les ensuite en un multi-indice $\boldsymbol{\beta}$ en prenant $\beta_{i+1}, \dots, \beta_m$ de telle sorte que

$$|\boldsymbol{\beta}| = \operatorname{codim} X \qquad \text{et} \qquad m_W(X) \geq \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\beta}} \epsilon^{\operatorname{codim} X}. \tag{3.32}$$

Enfin, fixons un tel $\boldsymbol{\beta}$ minimal pour l'ordre lexicographique.

Ce choix est possible : en effet, par l'Exemple 3.15 il suffit de s'assurer que le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par $\boldsymbol{\beta}$ est un complément de $T_y X$ dans $T_y \mathbb{C}^n$ pour un point $y \in X$ assez général. Choisir un $\boldsymbol{\beta}$ satisfaisant (3.32) est équivalent à choisir un $\boldsymbol{\gamma}$ tel que $\deg_{\boldsymbol{\gamma}}(X) \neq 0$ (par la relation $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{n} - \boldsymbol{\gamma}$). Il est tout à fait possible de choisir un tel $\boldsymbol{\gamma}$; voir la dernière note de bas de page.

L'on a $\alpha_i + \beta_i > n_i$ par (3.30). Par contre par construction, l'on a $\beta_j = n_j - \alpha_j$ pour $j < i$. Donc, il existe au moins un indice $j > i$ tel que $\beta_j < n_j - \alpha_j$. Choisissons le plus petit indice j pour lequel cette propriété est vraie. Alors l'on a

$$\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{\beta}} = \delta_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdots \delta_m^{\alpha_m + \beta_m} \geq \frac{\delta_i}{\delta_j} \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}}. \tag{3.33}$$

Maintenant l'on a $\epsilon^{\operatorname{codim} X} (\delta_i / \delta_j) \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}} \leq H_{\mathrm{g}}(G; \boldsymbol{\delta})$ par (3.32), (3.33) et (3.29). Ceci est une contradiction à l'hypothèse $\delta_i / \delta_{i+1} \ll 1$.

Donc X est une variété produit.

[6]. Dire que $\deg_{\boldsymbol{\alpha}}(X) \neq 0$ revient à dire que l'on peut couper X en $H_1 \times \cdots \times H_m$ où H_i est un sous-espace linéaire de $\mathbb{P}^{n_i}$ de codimension α_i en position générale et que le nombre de point obtenu est fini. Cette opération est possible dès que $\dim \pi_i(X) \geq \alpha_i$ pour tout i.

(ii) Par (i), $X = X_1 \times \cdots \times X_m$. Donc

$$H_{\mathrm{g}}(X;\boldsymbol{\delta}) = \binom{\dim X}{\dim X_1, \ldots, \dim X_m} \prod_{j=1}^{m} \deg(X_j)\delta_j^{\dim X_j}.$$

Par ailleurs,

$$m_W(X) \geq \epsilon^{\operatorname{codim} X} \prod_{j=1}^{m} \delta_j^{\operatorname{codim} X_j}.$$

Donc l'on a

$$\binom{\dim X}{\dim X_1, \ldots, \dim X_m} \epsilon^{\operatorname{codim} X} \prod_{j=1}^{m} \deg(X_j) \cdot \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}} \leq m_W(X) H_{\mathrm{g}}(X;\boldsymbol{\delta}) \leq H_{\mathrm{g}}(G;\boldsymbol{\delta}) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_m} \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{n}},$$

d'où l'assertion (ii).

(iii) Pour (iii), il faut utiliser l'inégalité concernant la hauteur dans le lemme de zéros (version homogène) de Philippon. Dans notre cas, elle est

$$m_W(X) H_{\mathrm{a}}(X;\boldsymbol{\delta}) \leq (n+1) \left(h(P) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \log(n_i+1) \right) H_{\mathrm{g}}(\mathbb{P};\boldsymbol{\delta}), \tag{3.34}$$

avec

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{a}}(X;\boldsymbol{\delta}) &= (\dim X + 1)! \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n,\ |\boldsymbol{\alpha}| = \dim X + 1} h_{\boldsymbol{\alpha}}(X) \frac{\delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_m^{\alpha_m}}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \\ &= H_{\mathrm{g}}(X;\boldsymbol{\delta}) \sum_{j=1}^{m} \frac{\dim X + 1}{\dim X_j + 1} \frac{h(X_j)}{\deg(X_j)} \delta_j. \end{aligned}$$

Alors l'on a, pout tout i,

$$\epsilon^{\operatorname{codim} X} \left(\prod_{j=1}^{m} \deg X_j \right) \frac{\delta_i h(X_i)}{\deg X_i} \ll (n+1) \left(h(P) + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \log(n_i+1) \right),$$

d'où l'assertion (iii). □