POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

Deuxième partie 2. Majoration du nombre des points rationnels sur les courbes par Dimitrov–Gao–Habegger

2. Finitude des points rationnels sur les courbes de genre au moins 2 (d'après Vojta, Faltings, Bombieri)

(05/11/2020 par Ziyang Gao)

Dans cet exposé, g est toujours un entier au moins 2 et C est une courbe projective lisse irréductible de genre g.

Pour deux diviseurs D et D' sur une variété X, notons $D \sim D'$ pour désigner que D et D' sont linéairement équivalents.

Nous écrivons $O(\cdot)$ pour une fonction bornée en terme de g, C et les immersions fermées fixées dans ces notes.

2.1. **Énoncés du théorème.** Le but de cet exposé est d'esquisser la démonstration du théorème suivant de Faltings (1983), connu sous le nom de la *conjecture de Mordell*, par Vojta.

Théorème 2.1. *Si C est définie sur un corps de nombre K, alors $\#C(K) < \infty$.*

En effet, nous prenons la simplification de Bombieri.

L'idée fondamentale de la preuve de Vojta est de démontrer que les points rationnels de C sont répartis de manière sporadique sur cette courbe. Cette idée remonte déjà à Mumford.

2.2. **Le diviseur de theta.** Fixons $P_0 \in C(K)$. Posons $J = \mathrm{Jac}(C)$ et

$$j\colon C \to J, \qquad P \mapsto [P - P_0]$$

le morphisme d'Abel–Jacobi via P_0. Alors j est défini sur K.

Posons

$$\Theta = \underbrace{j(C) + \ldots + j(C)}_{(g-1)\text{-fois}}.$$

Alors Θ est un diviseur de Weil sur J. Puisque J est lisse, l'on peut voir Θ aussi comme un diviseur de Cartier sur J. Il y a donc un fibré en droites associé à Θ.

Définition 2.2. *L'on appelle Θ le* ***diviseur de theta****. Posons $\Theta^- = [-1]^*\Theta$.*

Voici quelques propriétés élémentaires de Θ.

Proposition 2.3. *Nous avons :*

(i) $[2]^*\Theta = 3\Theta + \Theta^-$.

(ii) Θ est ample, c'est-à-dire que le fibré en droites associé à Θ est ample.

(iii) En tant que diviseurs sur C, $j^*\Theta^-$ et $g[P_0]$ sont linéairement équivalents.

Démonstration. Pour (i), il suffit d'utiliser la formula $[n]^*L \simeq L^{\otimes \frac{n^2+n}{2}} \otimes ([-1]^*L)^{\otimes \frac{n^2-n}{2}}$, qui est une conséquence du théorème de cube. Pour (ii), il s'agit de vérifier que $K(\Theta) := \{a \in J : t_a^*\Theta \sim \Theta\}$, où t_a est la translation par a, est un ensemble fini. En vue d'effectuer la démonstration de (iii), plus compliquée, nous nous référons aux littératures standards, par exemple le livre de Bombieri–Gubler ou le livre de Hindry–Silverman. $\square$

Il est, pour plusieurs raisons, plus naturel de travailler avec le diviseur (symétrique) $\Theta + \Theta^-$. Par Proposition 2.3.(ii), il est ample. Donc la hauteur normalisée y associée $\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-} : J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une forme quadratique, qui s'étend $\mathbb{R}$-linéairement en une forme quadratique

$$\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-} : J(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie positive. Notons la forme polaire de $\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}$ par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : J(\overline{\mathbb{Q}}) \times J(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Autrement dit,

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{2} \left(\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(z+w) - \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(z) - \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(w) \right)$$

pour tout $z, w \in J(\overline{\mathbb{Q}})$. Bien entendu, ceci vaut pour tout $z, w \in J(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$.

Maintenant l'on regarde $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, qui est un espace vectoriel de dimension finie par le théorème de Mordell–Weil. Alors $|\cdot| := \widehat{h}^{1/2}_{\Theta+\Theta^-}$ donne une norme sur cet espace vectoriel, et pour chaque $z, w \in J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ l'on a

$$\cos \alpha = \langle z, w \rangle / |z||w|$$

où α est l'angle entre z et w.

2.3. **La formule et le principe d'écart de Mumford.** L'accouplement (2.1) peut se voir comme une hauteur sur $J \times J$ comme suit. Considérons trois morphismes naturels

$$\begin{tikzcd} J \times J \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, "m"] & J \\ J & J \end{tikzcd}$$

où p_i est la projection vers l'i-ème facteur et m est l'addition.

Posons

$$\boldsymbol{\delta} = m^*\Theta - p_1^*\Theta - p_2^*\Theta \in \mathrm{Div}(J \times J). \tag{2.2}$$

Lemme 2.4. *L'on a $\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a, a) = \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(a)$ pour tout $a \in J(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$. Par conséquent $\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a, b) = \langle a, b \rangle$ pour tout $a, b \in J(\overline{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$.*

Démonstration. Pour la diagonale $\Delta_J : J \to J \times J$, l'on a

$$\Delta_J^*\delta = (m \circ \Delta_J)^*\Theta - (p_1 \circ \Delta_J)^*\Theta - (p_2 \circ \Delta_J)^*\Theta = [2]^*\Theta - 2\Theta = \Theta + \Theta^-$$

où la dernière égalité est obtenue par Proposition 2.3.(i). Donc

$$\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a,a) = \widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(\Delta_J(a)) = \widehat{h}_{\Delta_J^*\boldsymbol{\delta}}(a) = \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(a).$$

Et $\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a,b) = \langle a,b\rangle$ puisque $\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a+b,a+b) = \widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a,a) + \widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(b,b) + 2\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(a,b)$. □

Ceci donne une autre raison pour laquelle il est plus naturel de travailler avec $\Theta+\Theta^-$ plutôt que Θ. En effet, l'on peut démontrer que le fibré en droites associé à $\boldsymbol{\delta}$, que nous notons aussi par $\boldsymbol{\delta}$, est le tiré-en-arrière du fibré de Poincaré $\mathcal{P}$ sur $J\times J^\vee$ sous l'isogénie $\mathrm{id}\times\phi_\Theta\colon J\times J\to J\times J^\vee$. Ici $J^\vee$ est le dual de J et ϕ_Θ est la polarisation donnée par le diviseur ample Θ. Donc $\widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}} = \widehat{h}_{\mathcal{P}}\circ(\mathrm{id}\times\phi_\Theta)$. Par Lemma 2.4 elle correspond à $\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}$.

Dans la suite, nous identifions $\boldsymbol{\delta}$ avec le fibré en droites y associé. Posons Δ la diagonale dans $C\times C$.

Proposition 2.5. *Pour le morphisme $j\times j\colon C\times C\to J\times J$, l'on a*

$$(j\times j)^*\boldsymbol{\delta}\simeq\mathcal{O}(\{P_0\}\times C + C\times\{P_0\} - \Delta).$$

Démonstration. Ceci est une conséquence des propriétés du fibré de Poincaré et le paragraphe ci-dessus. □

Corollaire 2.6 (Formule de Mumford)**.** *L'on a, pour tout $P,Q\in C(\overline{\mathbb{Q}})$,*

$$h_\Delta(P,Q) = \frac{1}{2g}|j(P)|^2 + \frac{1}{2g}|j(Q)|^2 - \langle j(P),j(Q)\rangle + O(|j(P)|+|j(Q)|+1). \tag{2.3}$$

Démonstration. Notons $z=j(P)$ et $w=j(Q)$. L'on a

$$\begin{aligned}
\langle z,w\rangle &= \widehat{h}_{\boldsymbol{\delta}}(z,w) \qquad \text{par Lemme 2.4}\\
&= \widehat{h}_{(j\times j)^*\boldsymbol{\delta}}(P,Q)\\
&= h_{\mathcal{O}(\{P_0\}\times C+C\times\{P_0\}-\Delta)}(P,Q)+O(1) \qquad \text{par Proposition 2.5}\\
&= h_{\{P_0\}\times C}(P,Q) + h_{C\times\{P_0\}}(P,Q) - h_\Delta(P,Q) + O(1)\\
&= h_{[P_0]}(P) + h_{[P_0]}(Q) - h_\Delta(P,Q) + O(1)\\
&= \frac{1}{g}h_{j^*\Theta^-}(P) + \frac{1}{g}h_{j^*\Theta^-}(Q) - h_\Delta(P,Q) + O(1) \qquad \text{par Proposition 2.3.(iii)}\\
&= \frac{1}{g}\widehat{h}_{\Theta^-}(z) + \frac{1}{g}\widehat{h}_{\Theta^-}(w) - h_\Delta(P,Q) + O(1)\\
&= \frac{1}{2g}\Big(\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(z) - \widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(z)\Big) + \frac{1}{2g}\Big(\widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(w) - \widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(w)\Big) - h_\Delta(P,Q) + O(1)\\
&= \frac{1}{2g}\Big(|z|^2 - \widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(z)\Big) + \frac{1}{2g}\Big(|w|^2 - \widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(w)\Big) - h_\Delta(P,Q) + O(1).
\end{aligned}$$

Donc

$$h_\Delta(P,Q) = \frac{1}{2g}|j(P)|^2 + \frac{1}{2g}|j(Q)|^2 - \langle j(P),j(Q)\rangle - \frac{1}{2g}\widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(j(P)) - \frac{1}{2g}\widehat{h}_{\Theta-\Theta^-}(j(Q)) + O(1), \tag{2.4}$$

d'où l'on peut conclure. □

L'équation (2.3) donne une contrainte forte sur la répartition des points sur C. Pour le membre à gauche, l'on a $h_\Delta(P,Q)\geq 0$ car Δ est un diviseur effectif sur $C\times C$ et (P,Q) n'est pas dans son support. Pour le membre à droite, le terme principal étant une forme quadratique indéfinie car $g\geq 2$, il pourrait *à priori* prendre toutes les valeurs négatives, surtout quand $j(P)$ et $j(Q)$ sont à la fois de normes grandes et « trop proches ». L'équation (2.3) affirme alors que ce dernier cas ne peut pas arriver : si $|j(P)|$ et $|j(Q)|$ sont tous les deux très grands, alors soit l'angle entre $j(P)$ et $j(Q)$ est grand, soit $j(P)$ et $j(Q)$ ont des normes très différentes. Plus précisément l'on a le *principe d'écart (« Gap Principle » en anglais)* de Mumford.

Théorème 2.7 (Principe d'écart)**.** *Soit $\epsilon > 0$. Il existe une constante $R = R(C, \epsilon) > 0$ telle que la propriété suivante est vraie. Considérons toute paire de points distincts $P, Q \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfaisant :*

(i) $|j(Q)| \geq |j(P)|$;

(ii) l'angle entre $j(P)$ et $j(Q)$ est au plus $\cos^{-1}(3/4+\epsilon)$. Autrement dit, $\langle j(P), j(Q)\rangle \geq (3/4 + \epsilon)|j(P)||j(Q)|$.

Si $|j(P)| \geq R$, alors l'on a

$$|j(Q)| \geq 2|j(P)|. \tag{2.5}$$

Démonstration. Par hypothèse, $P \neq Q$. Donc $h_\Delta(P, Q) \geq 0$ car Δ est un diviseur effectif sur $C \times C$ et (P, Q) n'est pas dans son support.

Notons $z = j(P)$ et $w = j(Q)$. En plus du paragraphe précédent, par Corollaire 2.6 et puisque $|w| \geq |z|$ (la condition (i)), l'on a

$$\langle z, w\rangle \leq \frac{1}{2g}|z|^2 + \frac{1}{2g}|w|^2 + O(|w| + 1).$$

Divisons les deux côtés par $|z||w|$. La condition (ii) implique alors

$$\frac{3}{4} + \epsilon \leq \frac{1}{2g}\left(\frac{|w|}{|z|} + \frac{|z|}{|w|}\right) + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \leq \frac{1}{2g}\left(\frac{|w|}{|z|} + 1\right) + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

d'où

$$\frac{|w|}{|z|} \geq \frac{3}{2}g - 1 + 2g\epsilon - O\left(\frac{1}{|z|}\right) \geq 2 + 2g\epsilon - O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Donc pour R suffisamment grand, la condition $|z| \geq R$ implique $|w| \geq 2|z|$. □

2.4. **Inégalité de Vojta et sa conséquence sur la conjecture de Mordell.** Le principe d'écart nous propose de continuer comme suit. Dans l'espace euclidien $(J(K) \otimes \mathbb{R}, |\cdot| = \widehat{h}^{1/2}_{\Theta+\Theta^-})$, l'image de $J(K) \to J(K) \otimes \mathbb{R}$ est un réseau. [1] Considérons la boule centrée à l'origine de rayon R dans cet espace euclidien. L'on divise les points dans $C(K)$ en :

— (petits points) $\{P \in C(K) : \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(j(P)) < R\}$;

— (grands points) $\{P \in C(K) : \widehat{h}_{\Theta+\Theta^-}(j(P)) \geq R\}$.

Remarquons que l'ensemble des petits points est immédiatement fini car il s'agit de points de réseau contenus dans une boule bornée. Pour démontrer la conjecture de Mordell, il suffit alors de démontrer la finitude des grands points.

Pour ce faire, l'on divise $J(K) \otimes \mathbb{R}$ en des cônes selon la condition sur les angles entre les points distincts (soit la condition (ii) dans le principe d'écart). Plus précisément l'on

[1]. Deux points dans $J(K)$ ont la même image dans $J(K) \otimes \mathbb{R}$ si et seulement si leur différence est un point de torsion. Puisque $J(K)$ ne contient qu'un nombre fini de points de torsions (par le théorème de Mordell–Weil), considérer $j(C(K))$ comme un ensemble dans $J(K)$ ou dans $J(K) \otimes \mathbb{R}$ ne change pas la finitude.

peut diviser $J(K)\otimes\mathbb{R}$ en $7^{\dim J(K)\otimes\mathbb{R}}$ cônes tels que l'angle entre chaque deux points dans un même cône est au plus $\cos^{-1}(3/4+\epsilon)$. Le principe d'écart dit que dans chaque cône, les normes des grands points augmentent ≪ rapidement ≫.

Le théorème suivant, appelé *l'inégalité de Vojta*, permet alors de conclure.

Théorème 2.8 (Inégalité de Vojta)**.** *Soit $\epsilon > 0$. Il existe deux constantes $R = R(C,\epsilon) > 0$ et $\kappa = \kappa(g) > 0$ telles que la propriété suivante est vraie. Considérons toute paire de points distincts $P, Q \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfaisant :*

(i) $|j(Q)| \geq |j(P)|$;

(ii) l'angle entre $j(P)$ et $j(Q)$ est au plus $\cos^{-1}(3/4+\epsilon)$. Autrement dit, $\langle j(P), j(Q)\rangle \geq (3/4+\epsilon)|j(P)||j(Q)|$.

Si $|j(P)| \geq R$, alors l'on a

$$|j(Q)| \leq \kappa |j(P)|. \tag{2.6}$$

Les constantes R dans le principe d'écart et l'inégalité de Vojta ne sont *à priori* pas la même. Néanmoins nous pouvons les remplacer par leur maximum et supposer ainsi que c'est la même constante.

Démonstration du Théorème 2.1 en supposant l'inégalité de Vojta. Par la discussion avant, il suffit de démontrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de grands points dans chaque cône.

Soient $P_0, \dots, P_n$ de tels points distincts de normes croissantes. Alors le principe d'écart (2.5) induit

$$|j(P_n)| \geq 2|j(P_{n-1})| \geq \cdots \geq 2^n |j(P_0)|.$$

Pourtant, l'égalité de Vojta affirme que $|j(P_n)| \leq \kappa |j(P_0)|$. Donc $2^n \leq \kappa$. Donc dans chaque cône, il y a au plus $\log\kappa/\log 2$ grands points. Ceci permet de conclure. □

Le reste de l'exposé sera consacré à démontrer l'inégalité de Vojta.

Avant de continuer, remarquons que les arguments jusqu'à présent sont complètement géométriques qui marchent donc aussi pour les corps de fonctions. Pourtant, la démonstration de l'inégalité de Vojta utilise sérieusement des aspects arithmétiques.

2.5. **Les diviseur de Vojta et la formule de Mumford généralisée.** L'on peut vérifier que Δ, $\{P_0\}\times C$ et $C\times\{P_0\}$ engendrent $\mathrm{Div}(C\times C)$ à équivalences algébriques près. L'on a $\Delta\cdot\Delta = 2-2g$ par la formule d'adjonction. Posons

$$\Delta' = \Delta - \{P_0\}\times C - C\times\{P_0\}, \tag{2.7}$$

qui est de degré 0 sur chaque fibre de la projection $C\times C \to C$ (vers le 1^{er} ou le $2^{\text{ème}}$ facteur).

Définition 2.9. *Un diviseur de Vojta est de la forme*

$$V(d_1,d_2,d) = d_1\{P_0\}\times C + d_2 C\times\{P_0\} + d\Delta'$$

pour $d_1, d_2, d \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Comme la Proposition 2.6, l'on peut démontrer la *formule de Mumford généralisée.*

Proposition 2.10. *L'on a, pour tout $P, Q \in C(\overline{\mathbb{Q}})$,*

$$h_{V(d_1,d_2,d)}(P,Q) = \frac{d_1}{2g}|j(P)|^2 + \frac{d_2}{2g}|j(Q)|^2 - d\langle j(P), j(Q)\rangle + d_1 O(|j(P)|) + d_2 O(|j(Q)|) + (d_1+d_2+d)O(1). \tag{2.8}$$

Le terme principal de cette formule est une forme quadratique, qui est indéfinie si $d_1 d_2 < g^2 d^2$.

La démonstration de l'inégalité de Vojta est inspirée de celle du *théorème de Roth*. En gros, il faut majorer et minorer des évaluations d'une fonction en des points, et puis conclure en comparant ces deux bornes avec les paramètres tendant vers l'infini. Dans notre cas, cette fonction est la hauteur $h_{V(d_1,d_2,d)}$ sur $C \times C$, ces points sont les paires (P, Q) hors de la diagonale avec P, Q dans un cône Γ construit dans §2.4, et les paramètres sont d_1, d_2, d. Autrement dit, l'on cherche à démontrer une borne supérieure et une borne inférieure pour $h_{V(d_1,d_2,d)}(P,Q)$ pour d_1, d_2, d assez grands et pour tout $(P,Q) \in \Gamma \times \Gamma$ hors de la diagonale.

La ***majoration*** est donnée par (2.8).

2.6. Les sections du diviseur de Vojta et la première étape pour la minoration.

Nous cherchons à écrire un diviseur de Vojta $V = V(d_1, d_2, d)$ en tant que la différence de deux diviseurs très amples sur $C \times C$.

Fixons un entier N suffisamment grand tel que $N[P_0]$ est un diviseur très ample sur C. Alors il donne une immersion fermée

$$\phi_{[N]P_0} \colon C \to \mathbb{P}^n_K$$

telle que $\phi^*_{[N]P_0}\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}([N]P_0)$. Nous avons ainsi une immersion fermée

$$\psi = \phi_{[N]P_0} \times \phi_{[N]P_0} \colon C \times C \to \mathbb{P}^n_K \times \mathbb{P}^n_K$$

et, pour tous δ_1, δ_2 deux entiers,

$$\mathcal{O}_{C\times C}(\delta_1 N\{P_0\} \times C + \delta_2 N C \times \{P_0\}) \simeq \psi^*\mathcal{O}(\delta_1, \delta_2).$$

Fixons un entier M suffisamment grand tel que $B := M(\{P_0\} \times C + C \times \{P_0\}) - \Delta'$ est un diviseur très ample sur $C \times C$. Il donne alors une immersion fermée

$$\phi_B \colon C \times C \to \mathbb{P}^m_K$$

tel que $\phi_B^*\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{O}(B)$.

Supposons que

$$\delta_1 := \frac{d_1 + Md}{N} \text{ et } \delta_2 := \frac{d_2 + Md}{N} \text{ sont deux entiers.} \tag{V1}$$

Ceci est satisfait quitte à ajouter à d_1 un entier borné par N (et pareil pour d_2). Maintenant le diviseur de Vojta peut s'écrire comme la différence de deux diviseurs très amples

$$V = V(d_1, d_2, d) = (\delta_1 N\{P_0\} \times C + \delta_2 N C \times \{P_0\}) - dB. \tag{2.9}$$

Donc pour tout $P, Q \in C(K)$, l'on a

$$\begin{aligned}[K:\mathbb{Q}]h_V(P,Q) &= [K:\mathbb{Q}](\delta_1 h_{[N]P_0}(P) + \delta_2 h_{[N]P_0}(Q) - d h_B(P,Q)) \\ &= [K:\mathbb{Q}]\left(\delta_1 h(\phi_{[N]P_0}(P)) + \delta_2 h(\phi_{[N]P_0}(Q)) - d h(\phi_B(P,Q))\right).\end{aligned}$$

Notons $\phi_{[N]P_0}(P) = x = [x_0 : \cdots : x_n]$, $\phi_{[N]P_0}(Q) = x' = [x'_0 : \cdots : x'_n]$ et $\phi_B(P,Q) = y = [y_0 : \cdots : y_m]$. Alors le membre à droite de la formule ci-dessus devient

$$\delta_1 \sum_{v\in M_K} \max_j \log \|x_j\|_v + \delta_2 \sum_{v\in M_K} \max_{j'} \log \|x'_{j'}\|_v - d \sum_{v\in M_K} \max_i \log \|y_i\|_v = \sum_{v\in M_K} \min_i \max_{j,j'} \log \left\| \frac{x_j^{\delta_1} x_{j'}'^{\delta_2}}{y_i^d} \right\|_v .$$

Donc l'on a

$$h_V(P,Q) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_{v\in M_K} \min_i \max_{j,j'} \log \left\| \frac{x_j^{\delta_1} x_{j'}'^{\delta_2}}{y_i^d} \right\|_v . \tag{2.10}$$

Supposons que

$$\begin{aligned} (\mathtt{V2}) \qquad & \psi^*\colon \Gamma(\mathbb{P}_K^n \times \mathbb{P}_K^n, \mathcal{O}(\delta_1,\delta_2)) \to \Gamma(C\times C, \psi^*\mathcal{O}(\delta_1,\delta_2)) \\ & \text{et } \phi_B^*\colon \Gamma(\mathbb{P}_K^m, \mathcal{O}(d)) \to \Gamma(C\times C, \mathcal{O}(dB)) \text{ sont surjectifs.} \end{aligned}$$

Ceci est satisfait pour d_1, d_2, d assez grands.

Notons $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ les coordonnées de $\mathbb{P}_K^n \times \mathbb{P}_K^n$. Notons $\mathbf{y}$ les coordonnées de $\mathbb{P}_K^m$. Le lemme suivant n'est pas difficile à démontrer sous `(V2)`.

Lemme 2.11. *Pour toute section globale $s \in \Gamma(C\times C, V)$, il existe des polynômes $F_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')$ à coefficients dans K ($i \in \{0,\dots,m\}$) bi-homogènes de bi-degré (δ_1,δ_2) tels que*

$$s = \left.\frac{F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')}{y_i^d}\right|_{C\times C} \qquad \textit{pour tout } i \in \{0,\dots,m\}. \tag{2.11}$$

Inversement, si $F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')$ ($i \in \{0,\dots,m\}$) sont des polynômes à coefficients dans K bi-homogènes de bi-degré (δ_1,δ_2) tels que

$$(F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')/y_i^d)|_{C\times C} = (F_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')/y_j^d)|_{C\times C} \tag{2.12}$$

pour tous i et j, alors il existe une section globale unique $s \in \Gamma(C\times C, V)$ telle que (2.11) est satisfaite.

L'importance de ce lemme est que l'on peut choisir y_i^d comme le dénominateur. Ceci est un point important en vue de l'application du lemme de Siegel dans la Proposition 2.14.

Proposition 2.12. *Soit $s \in \Gamma(C\times C, V)$ une section globale qui correspond à $\mathcal{F} = (F_0,\dots,F_m)$ comme dans Lemme 2.11. Si $s(P,Q) \neq 0$, alors l'on a*

$$h_V(P,Q) \geq -h(\mathcal{F}) - n\log\left((\delta_1+n)(\delta_2+n)\right), \tag{2.13}$$

où $h(\mathcal{F}) = \max_i h(F_i)$.

Démonstration. La formule de produit induit, puisque $s(P,Q) \neq 0$, que

$$\sum_{v\in M_K} \log \|s(P,Q)\|_v = 0. \tag{2.14}$$

Donc

$$\begin{aligned}
[K:\mathbb{Q}]h_V(P,Q) &= \sum_{v\in M_K} \min_i \max_{j,j'} \log \left\| \frac{x_j^{\delta_1} x'^{\delta_2}_{j'}}{y_i^d \cdot s(P,Q)} \right\|_v \qquad \text{par (2.10) - (2.14)} \\
&= \sum_{v\in M_K} \min_i \max_{j,j'} \log \left\| \frac{x_j^{\delta_1} x'^{\delta_2}_{j'}}{F_i(x,x')} \right\|_v \qquad \text{par (2.11)} \\
&= -\sum_{v\in M_K} \max_i \min_{j,j'} \log \left\| F_i\left(\left[\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_m}{x_j} \right], \left[\frac{x'_0}{x'_{j'}}, \ldots, \frac{x'_m}{x'_{j'}} \right] \right) \right\|_v .
\end{aligned}$$

Fixons v et i, et posons $j_{v,i}$ défini par $\|x_j/x_{j_{v,i}}\| \le 1$ pout tout j et $j'_{v,i}$ défini par $\|x'_{j'}/x'_{j'_{v,i}}\| \le 1$ pour tout j'. Alors l'on a

$$\min_{j,j'} \log \left\| F_i\left(\left[\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_m}{x_j} \right], \left[\frac{x'_0}{x'_{j'}}, \ldots, \frac{x'_m}{x'_{j'}} \right] \right) \right\|_v \le \log \left\| F_i\left(\left[\frac{x_0}{x_{j_{v,i}}}, \ldots, \frac{x_m}{x_{j_{v,i}}} \right], \left[\frac{x'_0}{x'_{j'_{v,i}}}, \ldots, \frac{x'_m}{x'_{j'_{v,i}}} \right] \right) \right\|_v .$$

Si $v \nmid \infty$, alors ceci est au plus $\log \max \|\text{coefficients de } F_i\|_v$. Si $v|\infty$, il faut considérer en plus le nombre de monômes, qui est au plus $\binom{\delta_1+n}{n}\binom{\delta_2+n}{n} \le (\delta_1+n)^n(\delta_2+n)^n$. Donc

$$\begin{aligned}
[K:\mathbb{Q}]h_V(P,Q) &\ge -\sum_{v\in M_K} \max_i \log \max \|\text{coefficients de } F_i\|_v - \sum_{v|\infty} \log \|(\delta_1+n)^n(\delta_2+n)^n\|_v \\
&= -[K:\mathbb{Q}]h(\mathcal{F}) - [K:\mathbb{Q}]n \log\left((\delta_1+n)(\delta_2+n)\right),
\end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure. □

Grâce à cette proposition, pour obtenir la version finale de la minoration il suffirait de pouvoir choisir une section globale s qui satisfasse les deux propriétés suivantes : (i) s est *de petite hauteur*, c'est-à-dire $h(\mathcal{F})$ dans (2.13) est petite ; (ii) s ne s'annule pas en (P,Q).

En estimations diophantiennes, (i) est souvent assuré par une version appropriée du *lemme de Siegel*, et faire (ii) demande une *estimation de zéro* qui assure que l'on peut choisir une s qui ne s'annule pas à un grand ordre.

2.7. **Sections de petite hauteur.** Le but de cette sous-section est d'appliquer le lemme de Siegel pour construire une section globale $s \in \Gamma(C\times C, V)$ de petite hauteur.

Lemme 2.13 (Lemme de Siegel, version sur $\mathbb{Q}$)**.** *Soient M' et N' deux entiers strictement positifs tels que $M' < N'$. Soit $A = (a_{ij})_{i,j}$ une matrice $M' \times N'$ avec $a_{ij} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe un vecteur non-nul $x = (x_1, \ldots, x_{N'}) \in \mathbb{Z}^{N'}$ tel que $Ax = 0$ et*

$$|x| \le (N'H(A))^{M'/(N'-M')} \tag{2.15}$$

où $|x| = \max_j |x_j|$ et $H(A) = \max_{i,j}\{H(a_{ij})\}$.

Analysons comment appliquer le lemme de Siegel (version sur K) pour construire s.

Le nombre N' est le nombre de variables. Dans notre cas, par Lemme 2.11 il faut le penser comme $(m+1)$-fois la dimension de l'espace de tout $F(\mathbf{x},\mathbf{x}')|_{C\times C}$ de bi-degré (δ_1,δ_2). Donc

$$N' \approx (m+1)\dim \Gamma(C\times C, \psi^*\mathcal{O}(\delta_1,\delta_2)) \ge (m+1)(N\delta_1+1-g)(N\delta_2+1-g).$$

Ici nous avons utilisé le théorème de Riemann–Roch pour C pour démontrer le $\geq$ ci-dessus. En effet, par l'hypothèse (V2), l'on a

$$\dim \Gamma(C \times C, \psi^* \mathcal{O}(\delta_1, \delta_2)) = (N\delta_1 + 1 - g)(N\delta_2 + 1 - g). \tag{2.16}$$

Si le rang de A est M', alors le nombre $N' - M'$ est la dimension de l'espace des solutions du système linéaire en question. Dans notre cas, il est

$$\dim \Gamma(C \times C, \mathcal{O}(V(d_1, d_2, d))) \geq d_1 d_2 - gd^2 + (g-1)(d_1 + d_2) \tag{2.17}$$

si $d_1 + d_2 > 4g - 4$. Ici le $\geq$ est obtenue par le théorème de Riemann–Roch pour $C \times C$.

Si $\mathrm{rang}(A) < M'$, alors nous pouvons éliminer des équations pour que M' devienne $\mathrm{rang}(A)$. Remarquons que l'on peut faire l'élimination de sorte que $h(A) = \log H(A)$ augmente au plus linéairement.

Supposons que

$$\texttt{(V3)} \qquad d_1 + d_2 > 4g - 4 \quad \text{et} \quad d_1 d_2 - gd^2 > \gamma d_1 d_2 \text{ pour un } \gamma > 0.$$

Ici γ ne dépend pas de d_1, d_2, d. Nous choisirons ce γ après.

Proposition 2.14. *Supposons* (V1), (V2) *et* (V3). *Alors il existe une section globale $s \in \Gamma(C \times C, \mathcal{O}(V))$ correspondant à $\mathcal{F} = (F_0, \ldots, F_m)$ telle que*

$$h(\mathcal{F}) = O\left(\frac{d_1 + d_2}{\gamma}\right). \tag{2.18}$$

Esquisse de la démonstration. Pour pouvoir appliquer le lemme de Siegel, il faut transformer les conditions (2.12) en un système linéaire A dont les variables sont les coefficients de F_i. Ceci est faisable puisque la courbe C (resp. la surface $C \times C$) est réalisée comme une sous-variété de $\mathbb{P}^n_K$ (resp. de $\mathbb{P}^m_K$) par l'immersion $\phi_{[N]P_0}$ (resp. par l'immersion ϕ_B), donc est définie comme le lieu de zéro commun de polynômes. Il peut être vérifié que $h(A) := \log H(A) = O(d)$ parce que dans l'écriture de s le dénominateur (soit y_i^d) est de hauteur 0.

Donc le lemme de Siegel implique

$$h(\mathcal{F}) \leq \frac{(m+1)\dim \Gamma(C \times C, \psi^* \mathcal{O}(\delta_1, \delta_2))}{\dim \Gamma(C \times C, \mathcal{O}(V(d_1, d_2, d)))}(O(d) + \log O(1)).$$

Donc par (2.16), (2.17), (V1) et (V3), l'on a

$$h(\mathcal{F}) \leq \frac{N^2 \delta_1 \delta_2 + O(d_1 + d_2 + d)}{\gamma d_1 d_2 + O(d_1 + d_2)} O(d). \tag{2.19}$$

Par (V3), l'on a $d = O(d_1 + d_2)$. Rappelons que $N\delta_i = d_i + Md$; voir (V1). L'on peut alors conclure après un calcul direct. $\square$

Avant de continuer pour les estimations de zéros, nous faisons un calcul. Remarquons que $\delta_1 + \delta_2 = O(d_1 + d_2)$, puisque $d = O(d_1 + d_2)$ par (V3).

Si la section s construite dans la Proposition 2.14 satisfait $s(P, Q) \neq 0$, alors l'on a, par (2.13) et (2.18),

$$h_V(P, Q) \geq -O\left(\frac{d_1 + d_2}{\gamma}\right).$$

Avec la majoration de $h_V(P, Q)$ donnée par (2.8), l'on a alors

$$-O\left(\frac{d_1 + d_2}{\gamma}\right) \leq \frac{d_1}{2g}|j(P)|^2 + \frac{d_2}{2g}|j(Q)|^2 - d\langle j(P), j(Q)\rangle + d_1 O(|j(P)|) + d_2 O(|j(Q)|) + O(d_1 + d_2). \tag{2.20}$$

Maintenant nous faisons nos choix de d_1, d_2 et d. Posons, pour un entier $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ et un nombre réel $\gamma_0 \in]0,1[$,

$$d_1 = \sqrt{g+\gamma_0}\frac{D}{|j(P)|^2} + O(1), \quad d_2 = \sqrt{g+\gamma_0}\frac{D}{|j(Q)|^2} + O(1), \tag{2.21}$$
$$d = \frac{D}{|j(P)||j(Q)|} + O(1).$$

Nous prendrons $D \to \infty$. Remarquons que $d_1 d_2 - g d^2 > \gamma d_1 d_2$ pour $\gamma = \gamma_0/(g+\gamma_0) + o(1)$.

Divisons (2.20) par D, l'on a

$$\frac{\langle j(P), j(Q)\rangle}{|j(P)||j(Q)|} \leq \frac{\sqrt{g+\gamma_0}}{g} + O(\frac{1}{|j(P)|} + \frac{1}{|j(Q)|}).$$

Le membre à droite est plus petit que $3/4$ lorsque $|j(P)|$ et $|j(Q)|$ et assez grands, puisque $g \geq 2$. Cela dit que l'angle entre $j(P)$ et $j(Q)$ est forcément plus grand que $\cos^{-1}(3/4)$ lorsqu'ils sont de norme grande, sous l'hypothèse qu'*il existe une petite section s qui ne s'annule pas en* (P,Q). Autrement dit, dans chaque cône construit dans §2.4, il existe au plus 1 grand point sous cette même hypothèse, un résultat beaucoup plus fort que le principe d'écart et l'inégalité de Vojta !

2.8. **Conséquence des estimations de zéro.** En pratique, nous ne pouvons pas trouver une telle s pour toute (P,Q). Néanmoins, les *estimations de zéro* nous assurent que nous pouvons choisir une petite section s qui ne s'annule pas à un grand ordre.

Définition 2.15. *Soient $s \in \Gamma(C \times C, \mathcal{O}(V)) \setminus \{0\}$ et $(P,Q) \in (C \times C)(\overline{\mathbb{Q}})$. Une paire $(i_1^*, i_2^*) \in \mathbb{N}^2$ est dite **admissible** pour s en (P,Q) si $\partial_{i_1^*}\partial'_{i_2^*}s(P,Q) \neq 0$ et*

$$\partial_{i_1}\partial'_{i_2}s(P,Q) = 0 \quad \textit{pour tout } i_1 \leq i_1^*,\ i_2 \leq i_2^* \textit{ et } (i_1,i_2) \neq (i_1^*, i_2^*).$$

Ici $\partial_i = (1/i!)\partial^i$ et $\partial'_i = (1/i!)\partial'^i$.

Les estimations de zéro, par exemple *le lemme de Roth*, permettent de prouver :

Proposition 2.16. *Il existe une constante $c = c(C, \phi_{[N]P_0}, \phi_B) > 0$ avec la propriété suivante. Soient $\varepsilon \in]0,1[$ et $(P,Q) \in (C \times C)(\overline{\mathbb{Q}})$ tells que*

$$\varepsilon^2 d_1 \geq d_2 \quad \textit{et} \quad \min\{d_1|j(P)|^2, d_2|j(Q)|^2\} \geq \frac{c}{\gamma\varepsilon^2}d_1.$$

Alors pour la section s construite dans la Proposition 2.14, il existe une paire (i_1^*, i_2^*) pour s en (P,Q) avec

$$\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2} \leq 12N\varepsilon.$$

Ensuite il faut généraliser la minoration (2.13) en écartant l'hypothèse $s(P,Q) \neq 0$.

Proposition 2.17. *Soit $s \in \Gamma(C \times C, V)$ une section globale qui correspond à $\mathcal{F} = (F_0, \ldots, F_m)$ comme dans Lemme 2.11. Soit (i_1^*, i_2^*) une paire admissible pour s en (P,Q). Alors*

$$h_V(P,Q) \geq -h(\mathcal{F}) - O(i_1^*|j(P)|^2 + i_2^*|j(Q)|^2 + i_1^* + i_2^*) - O(\delta_1 + \delta_2). \tag{2.22}$$

Ayant ces résultats, nous sommes prêts de finir la démonstration de l'inégalité de Vojta, soit le Théorème 2.8.

Démonstration de l'inégalité de Vojta. Soient $P, Q \in C(\overline{\mathbb{Q}})$ satisfaisant les conditions (i) et (ii). L'inégalité (2.20) devient, en remplaçant (2.13) par (2.22),

$$\begin{aligned}(2.23)\qquad & -O\left(\frac{d_1+d_2}{\gamma}\right) - O(i_1^*|j(P)|^2 + i_2^*|j(Q)|^2 + i_1^* + i_2^*) - O(\delta_1+\delta_2)\\ \le & \frac{d_1}{2g}|j(P)|^2 + \frac{d_2}{2g}|j(Q)|^2 - d\langle j(P), j(Q)\rangle + d_1 O(|j(P)|) + d_2 O(|j(Q)|) + O(d_1+d_2).\end{aligned}$$

Choisissons d_1, d_2, d comme dans (2.21), aussi γ_0 et γ. Rappelons que $O(\delta_1+\delta_2) = O(d_1+d_2)$. Alors cette inégalité devient

$$(2.24)\quad \frac{\langle j(P), j(Q)\rangle}{|j(P)||j(Q)|} \le \frac{\sqrt{g+\gamma_0}}{g} + O\left(\frac{1}{|j(P)|} + \frac{1}{|j(Q)|}\right) + O\left(\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2}\right) + O\left(\frac{i_1^*+i_2^*}{D}\right)$$

Puisque $|j(Q)| \ge |j(P)|$ par la condition (i) et $\langle j(P), j(Q)\rangle > (3/4)|j(P)||j(Q)|$ par la condition (ii), l'on a

$$(2.25)\qquad \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{g+\gamma_0}}{g} + O\left(\frac{1}{|j(P)|}\right) + O\left(\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2}\right) + O\left((\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2})\frac{1}{|j(P)|^2}\right).$$

Posons $\varepsilon = |j(P)|/|j(Q)|$. Alors $\varepsilon \in]0, 1]$. Il n'y a rien à démontrer quand $\varepsilon = 1$. Maintenant supposons que $\varepsilon < 1$. Alors $\varepsilon^2 d_1 \ge d_2$ par les choix de d_1 et d_2. La condition $\min\{d_1|j(P)|^2, d_2|j(Q)|^2\} \ge \frac{c}{\gamma\varepsilon^2} d_1$ est satisfaite si $|j(P)|$ est assez grand. Donc l'on peut appliquer la Proposition 2.16 et obtenir une minoration $\frac{i_1^*}{d_1} + \frac{i_2^*}{d_2} \le 12N\varepsilon$. Donc (2.25) implique

$$\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{g+\gamma_0}}{g} + 12N\varepsilon + O\left(\frac{1}{|j(P)|}\right) + O\left(12N\varepsilon\frac{1}{|j(P)|^2}\right).$$

Ceci donne une minoration strictement positive, disons ε_0, pour ε lorsque $|j(P)|$ assez grand. Plus précisément il existe $R = R(C) > 0$ tel que $|j(P)| \ge R \Rightarrow \varepsilon > \varepsilon_0$. Remarquons que ε_0 ne dépend que de g et γ_0. Donc nous pouvons fixer un $\gamma_0 \in]0, 1[$ et alors ε_0 ne dépend que de g.

Posons $\kappa = 1/\varepsilon_0 \ge 1$ qui ne dépend que de g. Si $|j(P)| \ge R$, alors l'on a $|j(Q)| \le \kappa|j(P)|$ par le paragraphe précédent. Ceci est précisément l'égalité de Vojta. $\square$