POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

4. Les espaces de modules grossiers et fins

(19/11/2020 par Marc Hindry)

Dans cet exposé, par « courbe » nous voulons dire une courbe projective lisse géométriquement irréductible sauf indication contraire.

Quelques références pour cet exposé :

— D. Mumford et J. Fogarty et F. Kirwan, « Geometric Invariant Theory », Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge, vol. 34, 1994, Springer–Verlag.

— D. Mumford, « Stability of Projective Varieties : Lectures Given at Bures-sur-Yvette », France, Mar.-Apr. 1976, numéro 25 de Monographies de l'enseignement mathématique, 1977.

— P. Deligne et D. Mumford, « *The irreducibility of the space of curves of given genus* », Publ. de l'IHÉS, **36** :75–109, 1969.

— J. Harris et I. Morrisan, « Moduli of Curves », GTM 187, 1998, Springer.

— G. Faltings et C.-L. Chai, « Degeneration of Abelian Varieties », Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 22, 1990, Springer–Verlag.

4.1. **Les premiers exemples, familles v.s. paramètres.** Nous voulons construire :

(i) $\mathbb{M}_g$ qui paramètre les courbes de genre g modulo isomorphismes ;

(ii) $\mathbb{A}_g$ qui paramètre les variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g modulo isomorphismes.

Les buts de cette sous-section, comme soulignés dans le titre, sont tout d'abord de donner quelques exemples pour $\mathbb{M}_g$ et $\mathbb{A}_g$ (pour $g \leq 3$), et ensuite de voir $\dim \mathbb{M}_g$ et $\dim \mathbb{A}_g$ pour g quelconque si $\mathbb{M}_g$ et $\mathbb{A}_g$ existent.

4.1.1. *Courbes.* Avant de voir le cas général, regardons comment classifier les classes d'isomorphismes des courbes de genre g pour des petits g.

Soit C une courbe définie sur un corps k.

— Cas $g = 0$. Dans ce cas-là, C est tout simplement $\mathbb{P}^1$ pour k algébriquement clos, et donc $\mathbb{M}_0$ est un point. Pour k quelconque, C est isomorphe à une conique, et $C \simeq \mathbb{P}^1$ sur k si $C(k) \neq \emptyset$.

— Cas $g = 1$. Il y a plusieurs façons pour regarder ce cas. Dans ce cas, la courbe est souvent notée E (l'abbreviation de « elliptique ») au lieu de C.

(i) E peut être réalisée comme le lieu de zéros de $y^2 = x^3 + Ax + B$ (lorsque $\mathrm{car}(k) \neq 2, 3$). Posons $j(E) = \frac{A^3}{4A^3+27B^2}$. Il est connu que $j(E) = j(E') \Leftrightarrow E \simeq E'$ sur $\overline{k}$.

L'on a ainsi la conséquence suivante : chaque famille de courbes elliptiques $\mathcal{E} \to B$ induit une application $j\colon B \to \mathbb{A}^1$ définie par $b \mapsto j(E_b)$. Ceci suggère que l'on peut poser $\mathbb{M}_1 = \mathbb{A}^1$, qui est un espace de modules *grossier.*

(ii) Avant de donner la deuxième façon pour voir $\mathbb{M}_1$, nous expliquons les espaces de modules fins par l'exemple suivant. Les hyperplans dans $\mathbb{P}^N$ sont paramétrés par $(\mathbb{P}^\vee)^N$ (selon la convention de Grothendieck). Nous avons une famille des hyperplans $\pi\colon Z \subseteq \mathbb{P}^N \times (\mathbb{P}^\vee)^N \to (\mathbb{P}^\vee)^N$, c'est-à-dire que $\pi^{-1}(m)$ est l'hyperplan de $\mathbb{P}^N$ que m paramètre. L'existence de la famille universelle indique que $(\mathbb{P}^\vee)^N$ est un espace de modules *fin.*

L'on voudrais avoir l'analogue pour les courbes elliptiques. Posons $\mathcal{E}_t : y^2+xy = x^3 - \frac{36}{t-1728}x - \frac{1}{t-1728}$ pour tout $t \neq 1728$. Alors $\mathcal{E}_t$ est une courbe elliptique avec $j(\mathcal{E}_t) = t$ pour $t \neq 0, 1728$. Ceci donne une famille $\mathcal{E} \to \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty, 0, 1728\}$, qui est une famille « presque universelle ».

(iii) La dernière façon est par le modèle de Legendre $E_\lambda\colon y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Il est connu que $E_\mu \simeq E_\lambda \Leftrightarrow \mu \in \{\lambda, \lambda^{-1}, 1-\lambda, (1-\lambda)^{-1}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}\}$. Ceci suggère que l'on peut poser $\mathbb{M}_1 = (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})/S_3$.

— Cas $g = 2$. Une courbe de genre 2 peut s'écrire comme $C_{\mathbf{t}}\colon y^2 = x(x-1)(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$. L'on a $C_{\mathbf{t}} \simeq C_{\mathbf{t}'} \Leftrightarrow \mathbf{t}' = \sigma(\mathbf{t})$ pour un $\sigma \in S_5$. Donc l'on peut poser $\mathbb{M}_2 = ((\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, 8\})^3 \setminus \Delta)/S_5$. Ici Δ est la diagonale. Remarquons que $\dim \mathbb{M}_2 = 3$. Cette construction est a été précisée par Igusa en 1960.
— Cas $g = 3$. Dans ce cas-là, C est soit hyperelliptique (si ω_C n'est pas très ample) soit quartique dans $\mathbb{P}^2$ (si ω_C est très ample).
Il peut être vérifié que

(i) l'espace de modules des courbes hyperelliptiques de genre 3 est $\mathrm{Hyperell}_3 = ((\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^5 \setminus \Delta)/S_7$. Ici Δ est la diagonale. Il est évident que $\dim \mathrm{Hyperell}_3 = 5$.

(ii) l'espace de modules des quartiques (lisses) dans $\mathbb{P}^2$ est $Q_3 \simeq (\mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(4)) \setminus \mathrm{disc})/\mathrm{PGL}(3)$, avec disc le lieu où le discriminant s'annule. L'on peut vérifier que $\dim Q_3 = 15 - 9 = 6$.

L'on a $\mathbb{M}_3 = Q_3 \sqcup \mathrm{Hyperell}_3$. Remarquons que dans $\mathbb{M}_3$, Q_3 est un ouvert Zariski et $\mathrm{Hyperell}_3$ est un diviseur.

Lemme 4.1. *L'on a* $\dim \mathbb{M}_g = \begin{cases} 3g-3 & si\ g \geq 2 \\ 1 & si\ g = 1 \\ 0 & si\ g = 0 \end{cases}.$

Démonstration par la théorie de déformations. Les déformations d'une courbe C sont paramétrées par $H^1(C, T_C)$. Sa dimension est (notons g le genre de C)

$$\begin{aligned} h^1(C, T_C) &= h^1(C, \omega_C^{\otimes -1}) \\ &= h^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \quad \text{par la dualité de Serre} \\ &= 3g-3+h^0(C, \omega_C^{\otimes -1}) \quad \text{par Riemann–Roch.} \end{aligned}$$

Donc $h^1(C, T_C) = \begin{cases} 3g-3 & \text{si } g \geq 2 \\ 1 & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{si } g = 0 \end{cases}$ pour C une courbe de genre g arbitraire.

Pourtant, les propriétés infinitésimales autour d'un point de $\mathbb{M}_g$ sont caractérisées par les déformations de la courbe qu'il paramètre. En particulier, l'on a $\dim \mathbb{M}_g = h^1(C, T_C)$, d'où l'on peut conclure par le paragraphe précédent. $\square$

Démonstration par des revêtements de grand degré. Fixons $d > 2g-2$. Nous faisons deux décomptes pour le nombre de paramètres pour choisir un revêtement $\phi\colon C \to \mathbb{P}^1$ de degré d avec C une courbe de genre g.

Le 1er décompte : si $\mathrm{car}(k) \neq 2$, alors un revêtement générique n'a que s points de ramification qui sont des nœuds (double ordinaire) [1]. La formule de Riemann–Hurwitz implique que $s = 2d + 2g - 2$.

Par ailleurs, si les points de ramification $P_1, \ldots, P_s$ sont fixés, alors il n'y a qu'un nombre fini de tels revêtements à isomorphismes près par le théorème de Riemann–Hilbert.

Par conséquent, le nombre de paramètres en question est $2d + 2g - 2$.

Le 2ème décompte : le nombre de paramètres pour choisir une courbe C est $\dim \mathbb{M}_g$, le nombre de paramètres pour choisir un $L \in \mathrm{Pic}^d(C)$ (un fibré de degré d) est $\dim \mathrm{Pic}^d(C) = \dim \mathrm{Pic}^0(C) = g$, le nombre de paramètres pour choisir une paire de sections $(s_1, s_2) \in (H^0(C, L) \times H^0(C, L))/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ est $2h^0(C, L) - 1$. [2] De plus, $h^0(C, L) = d + 1 - g$ par Riemann–Roch.

Par conséquent, le nombre de paramètres en question est $\dim \mathbb{M}_g + g + 2h^0(C, L) - 1 = \dim \mathbb{M}_g + 2d - g + 1$ *lorsque* $g \geq 2$ (en genre 1 et 0, il faut aussi compter la contribution de $\mathrm{Aut}(C)$, qui est de dimension 0 si $g \geq 2$).

En comparant les deux décomptes, nous obtenons $\dim \mathbb{M}_g + 2d - g + 1 = 2d + 2g - 2$ pour $g \geq 2$. Donc $\dim \mathbb{M}_g = 3g - 3$ pour $g \geq 2$. $\square$

4.1.2. *Variétés abéliennes.* Pour les variétés abéliennes, $\mathrm{Aut}(A)$ peut être infini (si $\mathrm{End}(A) \neq \mathbb{Z}$). En plus il n'y a pas un fibré en droites ample canonique sur A sauf si A est une courbe elliptique. Donc il faut ajouter des données supplémentaires.

L'idée naïve est de fixer un fibré en droites ample L sur A pour chaque variété abélienne A. L'on dit alors $(A, L) \sim (A', L')$ s'il existe $\phi\colon A \xrightarrow{\sim} A'$ tel que $\phi^* L' \simeq L$. Le problème de cette construction naïve est qu'elle ne s'étend pas bien aux schémas abéliens.

Afin de trouver le bon candidat comme donnée supplémentaire à ajouter, nous regardons la construction suivante. À chaque fibré en droites L sur A, l'on peut associer un

[1]. Autrement dit, $\phi^* P = 2Q_1 + Q_2 + \ldots Q_{d-1}$ pour chaque point de ramification, avec $Q_1, \ldots, Q_{d-1}$ deux-à-deux distincts.

[2]. Ayant ces données, l'on obtient un revêtement de degré d défini par $C \to \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [s_1(x) : s_2(x)]$.

morphisme

$$\phi_L\colon A \to A^\vee := \mathrm{Pic}^0(A), \quad a \mapsto [t_a^*L \otimes L^{-1}]$$

où $t_a\colon A \to A$ est la translation par a. De plus, ϕ_L est une isogénie si L est ample. Il est connu que $\phi_L = \phi_{L'}$ si et seulement si L est algébriquement équivalent à L'.

Définition 4.2. *Une isogénie $\lambda\colon A \to A^\vee$ est appelée une **polarisation** de A si $\lambda = \phi_L$ pour un fibré en droites ample L sur A.*

*Une polarisation λ est dite **principale** si* $\deg(\lambda) = 1$.

Lemme 4.3. *Soit λ une polarisation de A. Alors $\mathrm{Aut}(A, \lambda)$ est fini.*

De plus, étant donnée une polarisation λ sur A, l'on peut plonger A dans un espace projectif en utilisant le fibré en droites L associé à λ bien que ce plongement n'est pas canonique.

Posons

$$\mathbb{A}_g = \{\text{variétés abéliennes principalement polarisée de dimension } g\}/\text{isom}.$$

Les existences de tels $\mathbb{A}_g$ ne sont pas évidentes. Pour les petits g ($g \leq 3$), l'on peut construire $\mathbb{A}_g$ à partir de $\mathbb{M}_g$.

— Pour $g = 1$, l'on peut tout simplement poser $\mathbb{A}_1 = \mathbb{M}_1$.

— Pour $g = 2$, un théorème de Weil assure que (A, L) est soit $(\mathrm{Jac}(C), \Theta)$ soit $E_1 \times E_2$ avec la polarisation naturelle. Donc l'on peut poser $\mathbb{A}_2 = \mathbb{M}_2 \sqcup (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_1)/S_2$.

— Pour $g = 3$, il y a un analogue du théorème de Weil qui donne $\mathbb{A}_3 = \mathbb{M}_3 \sqcup \mathbb{M}_2 \times \mathbb{M}_1 \sqcup (\mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_1 \times \mathbb{M}_1)/S_3$.

Pour $g \geq 4$, les mêmes procédures ne suffiront plus. En effet, si $\mathbb{A}_g$ existe, alors sa dimension peut être explicitée.

Lemme 4.4. *L'on a $\dim \mathbb{A}_g = \frac{g(g+1)}{2}$. Donc $\dim \mathbb{A}_g > \dim \mathbb{M}_g$ pour $g \geq 4$.*

Démonstration. Sur $\mathbb{C}$, une variété abélienne principalement polarisée satisfait $A(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g)$ pour un $\tau \in \mathrm{Mat}(g \times g, \mathbb{C})$ avec $\tau = {}^{\mathrm{t}}\tau$ et $\mathrm{Im}\tau > 0$.

Posons $\mathfrak{H}_g = \{\tau \in \mathrm{Mat}(g \times g, \mathbb{C}) : \tau = {}^{\mathrm{t}}\tau,\ \mathrm{Im}\tau > 0\}$. Alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{H}_g = \frac{g(g+1)}{2}$.

La polarisation principale peut s'écrire comme suit. Considérons la forme de Riemann $H(w, w') = {}^{\mathrm{t}}w(\mathrm{Im}\tau)^{-1}\overline{w}'$ $(w, w' \in \mathbb{C}^g)$. L'on a

$$\mathrm{Im}H(m + \tau n, k + \tau l) = {}^{\mathrm{t}}nk - {}^{\mathrm{t}}ml$$

pour $m, n, k, l \in \mathbb{Z}^g$. Donc $\mathrm{Im}H$ est un accouplement antisymétrique de déterminant 1. Par conséquent, $\mathrm{Im}H$ donne une polarisation principale sur A.

La propriété suivante peut être vérifiée : $A_\tau \simeq A_{\tau'}$ si et seulement s'il existe $\gamma \in \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ tel que $\gamma(\tau) = \tau'$.

Donc $\mathbb{A}_g(\mathbb{C}) = \mathfrak{H}_g/\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$. Par conséquent, $\dim \mathbb{A}_g = \dim \mathfrak{H}_g = \frac{g(g+1)}{2}$. □

4.2. **Modules fins et grossiers.** Soit X un schéma. Rappelons le foncteurs des points de X (absolu ou sur une base S)

$$h_X\colon (\mathrm{Sch})^o \to \mathcal{E}\mathrm{ns}, \quad Y \mapsto \mathrm{Mor}(Y, X)$$

avec, pour un morphisme $f\colon Y \to Z$ de schéma,

$$h_X(f)\colon \mathrm{Mor}(Z, X) \to \mathrm{Mor}(Y, X), \quad g \mapsto g \circ f.$$

Définition 4.5. *Un foncteur $F\colon (\mathrm{Sch})^o \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ est dit* ***représentable*** *si $F = h_M$ pour un schéma M. Dans ce cas-là nous appelons M l'espace de modules* ***fin*** *pour F.*

Maintenant, posons $\mathcal{M}_g$ le foncteur défini par

$$\mathcal{M}_g(B) = \{X \to B \text{ familles de courbes de genre } g\}/\text{isom.}$$

S'il était représentable (faux) par M, alors $1_M\colon M \to M$ correspond à une famille $\mathcal{U} \to M$ qui est « universelle » au sens suivant : toute famille de courbes $f\colon X \to B$ induit un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathcal{U} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & M. \end{tikzcd}$$

Pareil, posons $\mathcal{A}_g$ le foncteur défini par

$$\mathcal{A}_g(B) = \{X \to B \text{ schéma abélien principalement polarisé de dimension relative } g\}/\text{isom.}$$

Nous aurions une famille universelle si $\mathcal{A}_g$ était représentable.

Malheureusement, ces deux foncteurs ne sont pas représentables car nous ne pouvons pas avoir des familles universelles. Voici deux raisons : tout d'abord deux courbes (ou variétés abéliennes principalement polarisées) isomorphes sur $\overline{K}$ ne sont pas forcément isomorphes sur K ; ensuite le groupe d'automorphismes de l'object paramétré varie.

Mais tout n'est pas perdu. L'on prend du recul et regarde les espaces de modules *grossiers.*

Définition 4.6. *Un schéma M est dit un espace de modules* ***grossier*** *pour un foncteur $F\colon (\mathrm{Sch})^o \to \mathcal{E}\mathrm{ns}$ s'il existe une transformation naturelle $F \to h_M$ qui donne une bijection entre les points sur $\overline{K}$.*

Bien qu'il n'y ait pas de famille universelle au-dessus d'un espace de modules grossier, l'on a la propriété suivante (prenons l'exemple de $\mathcal{M}_g$ en supposant que son espace de modules grossier $\mathbb{M}_g$ existe) : à chaque famille de courbes $f\colon X \to B$, l'on peut associer un morphisme (de façon fonctorielle) $\iota\colon B \to \mathbb{M}_g$ tel que $\iota(b) = \iota(b') \Leftrightarrow X_b \simeq X_{b'}$ sur $\overline{K}$.

Théorème 4.7 (Mumford)**.** *$\mathbb{M}_g$ (resp. $\mathbb{A}_g$) existe, sur $\mathbb{Z}$, comme l'espace de modules grossier pour le foncteur $\mathcal{M}_g$ (resp. pour $\mathcal{A}_g$).*

Exemple 4.8. *Avant de continuer, regardons un exemple important pour les espaces de modules fins.*

Nous voulons paramétrer les sous-variétés X de $\mathbb{P}^N$. Il y a deux points de vue.

(Chow) Posons $r = \dim X$ et $d = \dim X$. Posons $Z_X = \{(x, h_0, \dots, h_r) \in X \times ((\mathbb{P}^N)^\vee)^{r+1} : x \in X \cap H_0 \cap \cdots \cap H_r\}$. L'on a deux projections naturelles $p_1\colon Z_X \to X$ et $p_2\colon Z_X \to ((\mathbb{P}^N)^\vee)^{r+1}$. Il peut être vérifié que p_2 est génériquement fini, et donc $H_X := p_2(Z_X)$ est le lieu de zéro d'une forme F_X (appelée la ***forme de Chow****) multihomogène de degré d symétrique.*

L'on obtient ainsi une application $X \mapsto F_X \in \mathbb{P}(d, N, r)$, qui est injective.[3] *Donc l'on a un sous-schéma $\mathrm{Chow}_{d,N,r}$ de $\mathbb{P}(d, N, r)$ qui paramètre les $X \subseteq \mathbb{P}^N$ de dimension r et de degré d.*

[3]. Ici, $\mathbb{P}(d, N, r)$ est un espace projectif qui dépend de d, N et r.

(Hilbert–Grothendieck) *Posons $I(X)$ l'idéal homogène de X (saturé). La théorie des polynômes de Hilbert dit que $\dim(k[X_0,\dots,X_N]/I(X))_{\deg=t}$ est donnée par un polynôme $H_X(t)$ pour $t \gg 0$. Ce polynôme est appelé le* ***polynôme de Hilbert****. En effet, $H_X(t) = \chi(\mathcal{O}_X(t)) = \frac{d}{r!}t^r + \cdots + \chi(\mathcal{O}_X)$ avec $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + (-1)^r p_{\mathrm{a}}(X)$.*

Il est connu que pour une famille plate $\mathbb{P}^N \times B \supseteq \mathscr{X} \to B$, l'on a que les polynômes de Hilbert des fibres ne varient pas. Donc l'on peut définir le foncteur $\mathcal{H}\mathrm{ilb}_P$, où P est un polynôme, par

$$\mathcal{H}\mathrm{ilb}_P(B) = \{\mathscr{X} \to B \text{ famille plate telle que } H_{\mathscr{X}_b}(t) = P(t) \text{ pour tout point fermé } b \text{ de } B\}.$$

Grothendieck a démontré que $\mathcal{H}\mathrm{ilb}_P$ est représentable par un schéma Hilb_P. Donc l'on a une famille universelle $\mathcal{U}_P \to \mathcal{H}\mathrm{ilb}_P$.

Exemple 4.9. *Regardons un exemple pour les schémas de Hilbert. Considérons $\mathbb{P}^N$ avec $N = (2m-1)(g-1)-1$. Soit $P(t) = dt+1-g$ avec $d = m(g-1)(= \deg \phi_{\omega_C^{\otimes m}}(C))$. Alors Hilb_P contient une sous-variété localement fermée Z_g paramètrant toutes les courbes de genre g prolongées par $\omega_C^{\otimes 3}$. L'on a ainsi un diagramme cartésien*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{univ}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \mathcal{U}_P \arrow[d] \\ Z_g \arrow[r, "\subseteq"] & \mathrm{Hilb}_P. \end{tikzcd}$$

Soient $X \to B$ une famille de courbes de genre g et $\phi\colon B \to Z_g$ tel que $X = B \times_{Z_g} \mathcal{C}^{\mathrm{univ}}$.

Un isomorphisme $\psi\colon C \simeq C'$ entre deux courbes induit $\pi^*\colon H^0{*}(C', \omega_{C'}^{\otimes m}) \simeq H^0(C, \omega_C^{\otimes m})$. Donc l'on a la propriété suivante : $X_b \simeq X_{b'}$ si et seulement si $\phi(b)$ et $\phi(b')$ sont $\mathrm{PGL}(N+1)$-équivalents.

Ceci suggère que pour construire $\mathbb{M}_g$, il faut chercher à prendre le quotient de Z_g par $\mathrm{PGL}(N+1)$. Ceci repose sur la théorie des invariants géométriques.

4.3. **Stabilité et quotients.** Soit X un schéma muni d'une action algébrique d'un groupe G. Nous voulons construire le quotient de X par G.

Un quotient $\pi\colon X \to X/G$ est tout d'abord un morphisme G-équivariant (c'est-à-dire $\pi(g \cdot x) = \pi(x)$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$) et surjectif. Ensuite il y a deux propriétés souvent requises :

(i) les fibres de π sont des G-orbites ;

(ii) pour tout morphisme $\psi\colon X \to Z$ qui est G-équivariant, il existe $\widehat{\psi}\colon X/G \to Z$ tel que $\psi = \widehat{\psi} \circ \pi$.

Un « *bon quotient* » est un quotient qui satisfait les propriétés (i) et (ii). Si π ne satisfait que la propriété (ii), alors l'on l'appelle *un quotient catégorique.*

Exemple 4.10. *Par exemple l'action de $\mathrm{GL}(n)$ sur $\mathbb{A}^n$, le morphisme $\pi\colon \mathbb{A}^n \to \{\mathrm{pt}\}$ est un quotient catégorique mais pas un bon quotient.*

Maintenant, supposons que G est un groupe réductif. Soit $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation.

Définition 4.11. *Soit $x \in V \setminus \{0\}$. Notons $O_G(x) = G \cdot x$. L'on dit que*

(i) x est instable si $0 \in \overline{O_G(x)}$;

(ii) *x est semi-stable si* $0 \notin \overline{O_G(x)}$ *;*

(iii) *x est stable si* $O_G(x)$ *est fermée et que* $\mathrm{Stab}_G(x)$ *est fini.*

Pour décrire le critère de stabilité des points dans X, nous utilisons la notation suivante. Soit $\lambda\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to G$ un cocaractère. Alors $\rho \circ \lambda(t) = U \cdot \mathrm{diag}(t^{m_1}, \dots, t^{m_r}) \cdot U^{-1}$ pour des entiers positifs $m_1, \dots, m_r$ et une matrice U. Donc pour $x = \sum x_i e_i$, l'on a $\rho \circ \lambda(t)(x) = \sum t^{m_i} x_i e_i$. Posons

$$W_x(\lambda) := \{m_i : x_i \neq 0\}. \tag{4.1}$$

Proposition 4.12 (Mumford + Haboush)**.** *Soit* $x \in V \setminus \{0\}$.

(i) *x est instable* $\Leftrightarrow$ $P(x) = 0$ *pour tout polynôme P qui est homogène et G-invariant* $\Leftrightarrow$ *Il existe* $\lambda\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to G$ *tel que* $m_i > 0$ *pour tout* $m_i \in W_x(\lambda)$.

(ii) *x est semi-stable* $\Leftrightarrow$ $P(x) = 0$ *pour un polynôme P qui est homogène et G-invariant* $\Leftrightarrow$ *Pour tout* $\lambda\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to G$, *il existe* $m_i \in W_x(\lambda)$ *tel que* $m_i \leq 0$.

(iii) *x est stable* $\Leftrightarrow$ *Pour tout* $y \in V \setminus O_G(x)$, *il existe un polynôme homogène G-invariant P tel que* $P(x) \neq P(y)$ $\Leftrightarrow$ *Pour tout* $\lambda\colon \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to G$ *non-trivial, il existe* $m_i, m_j \in W_x(\lambda)$ *tels que* $m_i < 0$ *et* $m_j > 0$.

Pour $m \gg 0$, prenons $f_1, \dots, f_N$ une base de $k[X_1, \dots, X_n]^G_m$. L'application rationnelle

$$\pi\colon \mathbb{P}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}^N, \qquad x \mapsto [f_0(x) : \cdots : f_N(x)]$$

satisfait les propriétés suivantes :

(i) π est bien définie hors du lieu instable ;

(ii) π épare les points stables ;

(iii) π est G-invariante.

Posons $\mathbb{P}(V)^{\mathrm{ss}}$ le lieu semi-stable dans $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V)^{\mathrm{st}}$ le lieu stable dans $\mathbb{P}(V)$. L'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(V) \supseteq \arrow[d, dashed, "\pi"'] & \mathbb{P}(V)^{\mathrm{ss}} \supseteq \arrow[d] & \mathbb{P}(V)^{\mathrm{st}} \arrow[d] \\
\mathbb{P}^N \supseteq & X = X^{\mathrm{ss}} := \pi(\mathbb{P}(V)^{\mathrm{ss}}) \supseteq & X^{\mathrm{st}} := \pi(\mathbb{P}(V)^{\mathrm{st}}).
\end{tikzcd}$$

Alors $\mathbb{P}(V)^{\mathrm{ss}} \to X^{\mathrm{ss}}$ est un quotient catégorique, et $\mathbb{P}(V)^{\mathrm{st}} \to X^{\mathrm{st}}$ est un bon quotient.

Retournons aux constructions des espaces de modules grossiers. Il faut démontrer que les points dans Z_g provenant les courbes sont des points stables ; voir l'Exemple 4.9 pour Z_g. Point clef : le critère avec les $\lambda\colon \mathbb{G}_m \to G$ se traduit en un critère numérique (compliqué mais accessible).

Théorème 4.13 (Mumford + Gieseker)**.** *Si* $m \geq 5$, *alors le point de Chow correspondant à* $\phi_{\omega_C^{\otimes m}}(C)$ *est stable pour l'action de* $G = \mathrm{PGL}(N+1)$.

Corollaire 4.14. *L'espace de modules grossier* $\mathbb{M}_g$ *existe et peut être construit comme* $Z_g/\mathrm{PGL}(N+1)$.

Pour les variétés abéliennes, l'on a les analogues. Plus précisément, l'on a :

Théorème 4.15. *Pour $m \gg 0$, le point de Chow correspondant à $\phi_{L^{\otimes m}(A)}$ est stable pour l'action de $G' = \mathrm{PGL}(N'+1)$.*

Corollaire 4.16. *L'espace de modules grossier $\mathbb{A}_g$ existe et peut être construit comme $Z'_g/\mathrm{PGL}(N'+1)$.*

Bien entendu, Z'_g est une sous-variété localement fermée dans un schéma de Hilbert bien choisi.

4.4. **Des variantes.** Commençons par les compactifications de $\mathbb{M}_g$.

Définition 4.17. *Une variété C (réduite), connexe, propre de dimension 1 est appelée une **courbe stable de genre** g si*

(i) *C n'a que des points doubles ordinaires comme singularités ;*
(ii) *si une composante de C est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, alors elle rencontre C en au moins 3 points ;*
(iii) $h^1(\mathcal{O}_C) = g$.

L'hypothèse (ii) assure que $\mathrm{Aut}(C)$ est fini. En plus, il peut être démontré qu'une courbe stable est une variété projective.

Théorème 4.18. *L'espace de modules grossier des courbes stables de genre g, noté $\overline{\mathbb{M}_g}$, existe. De plus, $\overline{\mathbb{M}_g}$ est projective.*

Démonstration. Ceci est une conséquence du théorème de réduction stable et le critère valuatif de propreté. □