POINTS RATIONNELS ET UNIFORMITÉ

NOTES PRISES PAR ZIYANG GAO

2. Uniformité des points rationnels sous les conjecture de Lang (d'après Caporaso–Harris–Mazur)

(22/10/2020 par Haohao Liu)

Dans cet exposé, toutes les courbes sont supposées géométriquement irréductibles sauf indication contraire.

2.1. **Énoncés des théorèmes.** Le but de cet exposé est d'esquisser les démonstrations des théorèmes d'uniformité suivants, dûs à Caporaso–Harris–Mazur.

Théorème 2.1. *Supposons que la conjecture de Lang est vraie.*

Pour tout entier $g \geq 2$ et tout corps de nombres K, il existe un nombre $B(K,g)$ tel que $\#C(K) \leq B(K,g)$ pour toute courbe C lisse de genre g définie sur K.

La borne $B(K,g)$ dans ce théorème a été améliorée à $B([K:\mathbb{Q}],g)$ par Pacelli.

Théorème 2.2. *Supposons que la conjecture de Lang forte est vraie.*

Pour tout entier $g \geq 2$, il existe un nombre $N(g)$ satisfaisant la propriété suivante. Pour tout corps de nombres K, il existe un ensemble fini Σ de classes de K-isomorphismes de courbes tel que pour toute courbe lisse C de genre g définie sur K, l'on ait $\#C(K) \leq N(g)$ si $C \notin \Sigma$.

Remarque 2.3. *Il est nécessaire d'exclure cet ensemble fini de courbes Σ, qui dépend de K, dans le Théorème 2.2 pour la raison suivante. Pour tout corps de nombres K, toutes courbes $C_1, \ldots, C_n$ définies sur K et tout entier $N \geq 1$, il existe une extension finie L/K telle que $\#C_i(L) \geq N$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

2.2. **Notations pour l'exposé.** Pour démontrer ces théorèmes d'uniformité, il est nécessaire de travailler dans des familles de courbes ou des fibrations en courbes.

Définition 2.4. *Une* ***fibration en courbes*** *de genre g est un morphisme $f\colon X \to B$ dominant propre entre deux variétés intègres tel que la fibre générique est une courbe projective lisse de genre g.*

Remarquons que dans cette définition, il y pourrait avoir des fibres de mauvaise réduction.

Dans le reste de l'exposé, nous fixons les notations suivantes. Fixons K un corps de nombres.

(i) $f\colon X \to B$ est toujours une fibration en courbes de genre $g \geq 2$ définie sur K.

(ii) Pour chaque entier $n \geq 1$, posons $X_B^{[n]} = X \times_B \cdots \times_B X$ (n-copies) et posons X_B^n la composante unique de $X_B^{[n]}$ qui domine B. Posons $X_B^0 = B$. Notons $f_n\colon X_B^n \to B$ le morphisme induit par f.

(iii) Notons $\mathbb{M}_g$ l'espace de modules des courbes projectives lisses de genre $g \geq 2$. Alors $f\colon X \to B$ induit une application rationnelle $\phi\colon B \dashrightarrow \mathbb{M}_g$.

2.3. **Théorème de corrélation.** Le point clef pour démontrer les théorèmes d'uniformité de Caporaso–Harris–Mazur est *le théorème de corrélation* suivant.

Théorème 2.5 (Théorème de Corrélation)**.** *Il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, il existe une application rationnelle dominante $h\colon X_B^n \dashrightarrow W$ avec W de type général. Si f, X, B sont définis sur un corps de nombres K, alors il en est de même pour W et h.*

De plus, l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_B^n \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "f_n"'] & W \arrow[d, dashed] \\ B \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathbb{M}_g \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

et W est le quotient de l'n-ème produit fibré de la famille universelle (au dessus d'un revêtement fini de $\mathbb{M}_g$) par un groupe fini.

2.4. **Preuve du Théorème 2.1 sous corrélation.** En utilisant la théorie des schémas de Hilbert, l'on peut construire une fibration en courbes de genre g *globale* $\mathbf{f}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ avec $\mathbf{X}$ et $\mathbf{B}$ projectives définies sur K et $\mathbf{f}$ défini sur K. Autrement dit, pour toute courbe C projective lisse de genre g définie sur K, il existe $b \in \mathbf{B}(K)$ tel que C est isomorphe à $\mathbf{X}_b := \mathbf{f}^{-1}(b)$ sur K. Nous nous référons à la section §1.4 de l'exposé du 15/10/2020 (Marc Hindry) pour sa construction.

Ayant cette fibration globale, nous pouvons ramener le Théorème 2.1 au lemme suivant par récurrence sur $\dim B$, la dimension de la base de la fibration en courbes $f\colon X \to B$ en question.

Lemme 2.6. *Supposons que la conjecture de Lang est vraie.*

Il existe un sous-ensemble ouvert Zariski dense U_0 de B et un entier N tels que pour tout $b \in U_0(K)$, l'on ait $\#X_b(K) \leq N$.

Démonstration. Quitte à remplacer B par un sous-ensemble ouvert Zariski dense près, nous pouvons supposer que le morphisme $f\colon X \to B$ est lisse. En particular chaque fibre de f est une courbe projective lisse.

Le Théorème de Corrélation, Théorème 2.5, nous donne une application rationnelle dominante $X_B^n \dashrightarrow W$ avec W de type général pour un n assez grand. De plus h et W sont définies sur K.

Si la conjecture de Lang est vraie, alors il existe une sous-variété ouverte Zariski dense W' de W telle que $W'(K) = \emptyset$. Donc il existe un sous-ensemble fermé propre Z de X_B^n tel que $X_B^n(K) \subseteq Z(K)$.

Pour chaque $1 \leq j \leq n$, posons $\pi_j\colon X_B^j \to X_B^{j-1}$ le morphisme d'oublie en oubliant la dernière composante. Remarquons que ces morphismes d'oublie induisent un morphisme $X_B^n \to X_B^j$ pour chaque $0 \leq j \leq n$; en particulier, ce morphisme est $f_n\colon X_B^n \to B$ quand $j = 0$ et est l'identité quand $j = n$.

Maintenant pour chaque $0 \leq j \leq n$, posons Z_j le plus grand sous-ensemble fermé de X_B^j tel que son image réciproque dans X_B^n est contenue dans Z. En particulier $Z_n = Z$. Alors Z_j est propre dans X_B^j puisque Z est propre est X_B^n. Nous allons démontrer l'affirmation suivante.

Affirmation. *Pour chaque* $1 \leq j \leq n$, *la restriction* $\pi_j|_{Z_j} \colon Z_j \to X_B^{j-1}$ *est un morphisme génériquement fini.*

En effet, prenons le point générique η_{j-1} de X_B^{j-1}. Alors $\pi_j^{-1}(\eta_{j-1})$ est irréductible de dimension 1. De plus, le point générique η_j de X_B^j est contenu dans $\pi_j^{-1}(\eta_{j-1}) \cap (X_B^j \setminus Z_j)$ puisque π_j est dominant. Par conséquent, $Z_j \cap \pi_j^{-1}(\eta_{j-1})$ est un ensemble fini, ce qui implique l'affirmation.

Nous pouvons encore raffiner cette affirmation en déterminant le lieu où la restriction de $\pi_j|_{Z_j}$ est un morphisme fini. Pour chaque $0 \leq j \leq n$, posons $U_j = X_B^j \setminus Z_j$, qui est alors un sous-ensemble ouvert Zariski dense de X_B^j.

Affirmation. *Pour chaque* $1 \leq j \leq n$, *la restriction* $\pi_j|_{Z_j \cap \pi_j^{-1}(U_{j-1})} \colon Z_j \cap \pi_j^{-1}(U_{j-1}) \to U_{j-1}$ *est un morphisme fini.*

En effet, soit $z \in X_B^{j-1}$ tel que $\pi_j^{-1}(z) \cap Z_j$ ait dimension au moins 1. Pourtant, $\pi_j^{-1}(z)$, étant une fibre de $\pi_j \colon X_B^j \to X_B^{j-1}$ qui s'identifie à une fibre de $f \colon X \to B$, est une courbe irréductible. Donc $\pi_j^{-1}(z) \cap Z_j = \pi_j^{-1}(z)$. Par définition de Z_{j-1} et Z_j, l'on a alors $z \in Z_{j-1}$.

Par la platitude générique, il existe un entier $d_j \geq 1$ tel que chaque fibre de $\pi_j|_{Z_j \cap \pi_j^{-1}(U_{j-1})}$ ait degré au plus d_j.

Maintenant prenons un point $b \in U_0(K)$. Par construction l'on a $X_b^n(K) \subseteq Z_n$, où $X_b^n = f_n^{-1}(b) \subseteq X_B^n$. Donc si l'on prend j le plus petit entier strictement positif tel que $X_b^j(K) \subseteq Z_j$, l'on a $j \leq n$.

Par conséquent $X_b^{j-1}(K) \cap U_{j-1} \neq \emptyset$.[1] Autrement dit, il existe un point $u \in U_{j-1}(K)$ tel que $u \mapsto b$ sous l'application $f_{j-1} \colon X_B^{j-1} \to B$.

Nous expliquons que $u \in \pi_j(Z_j) \cap U_{j-1}$. En effet $u \in X_b^{j-1}(K) = \pi_j(X_b^j(K)) \subseteq \pi_j(Z_j)$ car $X_b^j(K) \subseteq Z_j$.

Donc $\pi_j^{-1}(u)$, étant dans une fibre de $\pi_j|_{Z_j \cap \pi_j^{-1}(U_{j-1})}$, a cardinal au plus d_j.

Maintenant on peut conclure car X_b peut s'identifier à $\pi_j^{-1}(u)$. Il suffit de prendre $N = \max_{1 \leq j \leq n} d_j$. □

2.5. **Preuve du Théorème 2.2 sous corrélation.** La démonstration du Théorème 2.2 sous corrélation est plus subtle que celle du Théorème 2.1. Outre que l'analogue du Lemme 2.6, il faut aussi traiter les familles isotriviales.

Commençons par l'analogue du Lemme 2.6.

Lemme 2.7. *Supposons que la conjecture de Lang forte est vraie.*

[1]. $X_b^{j-1}(K)$ est non-vide car b est un K-point et f_{j-1} est défini sur K

Soit $\phi\colon B \dashrightarrow \mathbb{M}_g$ *l'application rationnelle induite par la fibration en courbes* $f\colon X \to B$. *Il existe un entier* $N \geq 1$ *et un sous-ensemble ouvert Zariski dense* U_0 *de* B *tels que pour toute extension finie* L/K, *il existe un ensemble fini* $\mathcal{E}_L \subseteq \mathbb{M}_g(\overline{\mathbb{Q}})$ *satisfaisant la propriété suivante. Si* $b \in U_0(L)$ *et* $\phi(b) \notin \mathcal{E}_L$, *alors* $\#X_b(L) \leq N$.

Remarque 2.8. *Ce lemme exclut un nombre fini de classes de* $\overline{\mathbb{Q}}$*-isomorphismes de courbes au lieu de classes d'*L*-isomorphismes. C'est pour cela que Lemme 2.7 n'implique pas le Théorème 2.2 directement comme Lemme 2.6 pour Théorème 2.1.*

Démonstration du Lemma 2.7. La démonstration ressemblant à celle du Lemme 2.6, nous donnons seulement une esquisse.

Le Théorème de Corrélation, Théorème 2.5, nous donne un diagramme commutatif pour n assez grand avec h, W définies sur K (voir (2.1))

$$\begin{tikzcd} X_B^n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_n"'] & W \arrow[d, "t"] \\ B \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{M}_g. \end{tikzcd}$$

Ici nous avons remplacé B par un sous-ensemble ouvert Zariski dense tel que toutes les applications rationnelles dans le diagramme deviennent des morphismes.

Si la conjecture de Lang forte est vraie, alors il existe une sous-variété ouverte Zariski dense W' de W telle que $W'(L)$ est fini pour toute extension finie L/K. Posons U_n la plus grande sous-variété ouverte Zariski dense de X_B^n telle que $h(U_n) \subseteq W'$. Contraire au Lemme 2.6, à ce stade nous ne pouvons pas démontrer que $U_n(L)$ est fini.

Posons $\mathcal{E}_L$ l'image de $W'(L) \to \mathbb{M}_g$ sous le morphisme t. Alors $\mathcal{E}_L \subseteq \mathbb{M}_g(\overline{\mathbb{Q}})$ est un ensemble fini car $W'(L)$ est fini.

Nous pouvons répéter la preuve du Lemme 2.6 pour construire π_j, Z_j et U_j.

Prenons $b \in U_0(L)$. Il y a deux cas.

(A) Si $X_b^n(L) \subseteq Z_n$, alors nous pouvons répéter les arguments pour démontrer Lemme 2.6.

(B) Si $X_b^n(L) \nsubseteq Z_n$, alors il existe $u \in U_n(L)$ qui s'envoie à $b \in U_0(L)$ sous le morphisme $f_n\colon X_B^n \to B$. Mais $h(U_n) \subseteq W'$ par construction. Donc $\phi(b) = \phi\circ f_n(u) = t\circ h(u) \in t(W'(L)) = \mathcal{E}_L$.

Ceci nous permet de conclure. □

Pour passer des $\overline{\mathbb{Q}}$-isomorphismes à des L-isomorphismes, il faut et il suffit de traiter les familles isotriviales définies comme suit.

Définition 2.9. *La fibration est dite* ***isotriviale*** *s'il existe un ensemble ouvert Zariski dense* U *de* B *tel que chaque fibre* X_b *au dessus de* $b \in U(\overline{\mathbb{Q}})$ *est isomorphe à une courbe fixe* C *sur* $\overline{\mathbb{Q}}$.

Si $f\colon X \to B$ est isotriviale, alors l'image de $\phi\colon B \to \mathbb{M}_g$ est un point.

Lemme 2.10. *Supposons que* $f\colon X \to B$ *est isotriviale.*

Supposons que la conjecture de Lang forte est vraie.

Il existe un entier $N \geq 1$ *et un sous-ensemble ouvert Zariski dense* U_0 *de* B *tels que pour toute extension finie* L/K, *il existe un ensemble fini* E *de classes d'*L*-isomorphismes* *de courbes satisfaisant l'alternatif suivant. Pour tout $b \in U_0(L)$, soit $X_b \in E$ soit $\# X_b(L) \leq N$.*

Démonstration. Appliquons le Théorème de Corrélation, Théorème 2.5, pour obtenir $h\colon X_B^n \to W$ avec W de type général, pour un n assez grand. De plus h et W sont définies sur K. Ici nous avons remplacé B par un sous-ensemble ouvert Zariski dense tel que h devienne un morphisme.

Si $f\colon X \to B$ est isotriviale, alors il existe un morphisme fini $B' \to B$ tel que $X' = X \times_B B' \to B'$ est isomorphe (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) à $B' \times C$. [2] De plus cet isomorphisme est défini sur une extension finie L_0/K (bien entendu, C est une courbe définie sur L_0).

Dans notre cas, tout est explicit : nous pouvons prendre $B' \to B$ un revêtement galoisien avec le groupe de Galois $G < \mathrm{Aut}(C)$ et $W = C^n/G$ ($n \geq \# G$).

Maintenant l'on a

$$\begin{array}{ccc} (X'_{B'})^n & \xrightarrow{h'} & C^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_B^n & \xrightarrow{h} & C^n/G = W, \end{array}$$

où h est défini sur K et h' est défini sur L_0.

Si la conjecture de Lang forte est vraie, alors il existe une sous-variété ouverte Zariski dense W' de W telle que $W'(L)$ est fini pour toute extension finie L/K. Posons U_n la plus grande sous-variété ouverte Zariski dense de X_B^n telle que $h(U_n) \subseteq W'$.

Affirmation. *Il existe un ensemble fini $\Sigma' = \{M_1, \ldots, M_k\}$, où chaque M_j est un corps de nombres contenant L_0 et L, tel que pour tout $b \in f_n(U_n(L)) \subseteq B(L)$, l'on ait $(X_b) \otimes_L M_i \simeq C \otimes_{L_0} M_i$ avec $M_i \in \Sigma'$.*

En effet, l'on a $h(U_n(L)) \subseteq W'(L)$ est un ensemble fini. Pour chaque $w \in h(U_n(L))$, fixons une extension finie L_1/L et un point $\widetilde{w} \in C^n(L_1)$ au dessus de w par rapport au quotient $C^n \to C^n/G = W$. Soit L_2 le compositum de L_0 et L_1. Alors $(X'_{B'})^n_{\widetilde{w}}(L_2) \neq \emptyset$ parce que h' est défini sur $L_2 \supseteq L_0$. En projetant vers B' nous obtenons un point $b' \in B'(L_2)$ au dessus de b. Autrement dit, $X_b \otimes_L L_2 \simeq X'_{b'} = C \otimes_{L_0} L_2$. Posons Σ' l'ensemble de ces L_2. Alors Σ' est fini par construction.

Cette affirmation a la conséquence suivante : il existe un ensemble fini E de classes d'L-isomorphismes de courbes tel que $X_b \in E$ pour tout $b \in f_n(U_n(L)) \subseteq B(L)$. [3]

Nous pouvons répéter la preuve du Lemme 2.6 pour construire π_j, Z_j et U_j.

Prenons $b \in U_0(L)$. Il y a deux cas.

(A) Si $X_b^n(L) \subseteq Z_n$, alors nous pouvons répéter les arguments pour démontrer Lemme 2.6.

(B) Si $X_b^n(L) \nsubseteq Z_n$, alors il existe $u \in U_n(L)$ qui s'envoie à $b \in U_0(L)$ sous le morphisme $f_n\colon X_B^n \to B$. Autrement dit, $b \in f_n(U_n(L))$. Donc $X_b \in E$.

Ceci permet de conclure. □

2.6. **Preuve de la corrélation : cas de familles de courbes stables de variation maximale.** Nous allons procéder à la démonstration du Théorème de Corrélation, Théorème 2.5, qui occupe plusieurs sous-sections. Nous le démontrons pour les *familles de courbes stables de variation maximale* dans cette sous-section.

Le résultat principal de cette sous-section est la proposition de corrélation suivante.

[2]. Ceci est vrai car $X \to B$ est une fibration en courbes. Pour une fibration générale, il faut remplacer ≪ isomorphe ≫ par ≪ birationnelle ≫.

[3]. Parce qu'il n'y a qu'un nombre fini de courbes définies sur L, à L-isomorphismes près, qui deviennent isomorphes sur une extension fixe de L.

Proposition 2.11. *Soit $f\colon X \to B$ une famille de courbes stables de variation maximale. Si B est projective, alors X_B^n est de type général pour tout n assez grand.*

Remarquons que la corrélation pour les familles de courbes stables de variation maximale est plus forte.

Voici les définitions de *familles de courbes stables* et *de variation maximale* mentionnées dans la Proposition 2.11.

Définition 2.12. *Une fibration en courbes $f\colon X \to B$ est dite* ***de variation maximale*** *si l'application rationnelle $\phi\colon B \dashrightarrow \mathbb{M}_g$ est génériquement finie, c'est-à-dire qu'il existe un sous-ensemble ouvert Zariski dense B_0 de B tel que $\phi|_{B_0}$ est un morphisme fini.*

Définition 2.13. *Une courbe connexe propre C est dite* ***stable*** *si* $\mathrm{Aut}(C)$ *est fini et que touts ses points singuliers (s'il y en a) sont des nœuds. Une fibratoin en courbes $X \to B$ est* ***une famille de courbes stables*** *si toutes ses fibres sont des courbes stables.*

Posons $\overline{\mathbb{M}}_g$ l'espace de modules des courbes stables de genre (arithmétique) g ; son existence est due à Deligne–Mumford. Par définition $\mathbb{M}_g$ est une sous-variété de $\overline{\mathbb{M}}_g$. En fait le théorème fameux de Deligne–Mumford dit que $\overline{\mathbb{M}}_g$ est une compactification de $\mathbb{M}_g$. En particulier, $\overline{\mathbb{M}}_g$ est une variété intègre car $\mathbb{M}_g$ l'est.

Démonstration du la Proposition 2.11. La famille de courbes stables $f\colon X \to B$ induit un morphisme $\phi\colon B \to \overline{\mathbb{M}}_g$. Ce morphisme ϕ est génériquement fini car f est de variation maximale.

Pour procéder, il faut des préparatifs (formes régulières, variétés canoniques, *etc.*) en géométrie algébrique. Nous les mettons dans la sous-section §2.7 pour rendre la démonstration actuelle plus compacte.

Il est connu que pour une famille de courbes stables $f\colon X \to B$, il existe un éclatement $B' \to B$ tel que $(X'_{B'})^n$ est une variété canonique pour tout n, où $X' = X \times_B B'$ (voir Corollaire 2.21 pour les variétés canoniques). Donc nous pouvons supposer que X_B^n est une variété canonique pour tout n. Dans ce cas-là, X_B^n est de type général si $\omega_{X_B^n}$ est gros.

Admettons le résultat suivant.

Affirmation. *Pour la famille de courbes stables de variation maximale $f\colon X \to B$, le faisceau dualisant relatif ω_f est gros.*

Pour la famille $f_n\colon X_B^n \to B$, la formule d'adjonction implique

$$\omega_{X_B^n} = \omega_{f_n} \otimes f_n^* \omega_B.$$

Mais $\omega_{f_n} = \bigotimes_{i=1}^n p_i^* \omega_f$, où $p_i\colon X_B^n \to X$ est l'i-ème projection. Donc $\omega_{X_B^n}$ est gros pour n assez grand par Lemme 2.14 (appliqué à $L = \omega_f$ et $M = \omega_B$). Ceci permet de conclure. $\square$

Lemme 2.14. *Soient $f\colon X \to B$ un morphisme projectif et plat, L un fibré en droites sur X et M un fibré en droite sur B. Si L est ample (ou gros), alors il en est de même pour $\bigotimes_{i=1}^n p_i^* L \otimes f_n^* M$ pour tout n assez grand, où $p_i\colon X_B^n \to X$ est l'i-ème projection.*

Démonstration. Ce lemme peut être vérifié par le critère de Kleiman dans le cas où L est ample. Si L est gros, l'on peut se ramener au cas où L est ample parce que ≪ gros = ample + effectif ≫. □

2.7. **Préparatifs pour la démonstration de la Proposition 2.11.**

Définition 2.15 (formes pluricanoniques régulières/lisses)**.** *Soient X une variété et $\eta \in \Gamma(X_{\mathrm{sm}}, \omega_{X_{\mathrm{sm}}}^{\otimes m})$. Nous appelons η une forme m-pluricanoniques* ***régulière*** *s'il existe une résolution des singularités $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ telle que $\pi^*\eta$ s'étende en un élément dans $\Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m})$.*

Bien entendu, cette définition ne dépend pas du choix de la résolution des singularités.

Remarque 2.16. *Par définition, l'on a $\Gamma(X_{\mathrm{sm}}, \omega_{X_{\mathrm{sm}}}^{\otimes m})_{\mathrm{reg}} \hookrightarrow \Gamma(\widetilde{X}, \omega_{\widetilde{X}}^{\otimes m})$.*

Définition 2.17. *Soit X une variété. Un point $p \in X$ est dit* ***n'impose pas de conditions adjointes*** *si pour tout voisinage suffisamment petit U de p et pour m assez grand, l'on a $\Gamma(U_{\mathrm{sm}}, \omega_{U_{\mathrm{sm}}}^{\otimes m}) = \Gamma(U_{\mathrm{sm}}, \omega_{U_{\mathrm{sm}}}^{\otimes m})_{\mathrm{reg}}$.*

Définition 2.18. *Une variété normale X est dite* ***$\mathbb{Q}$-Gorenstein*** *s'il existe un $r \geq 1$ tel que $\omega_{X_{\mathrm{sm}}}^{\otimes r}$ s'étende en un fibré en droites L sur X.*

Soient X une variété $\mathbb{Q}$-Gorenstein et $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ une résolution des singularités. Alors $\omega_{\widetilde{X}}^{\otimes r} = \pi^*L \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(D)$ pour un diviseur de Cartier D dans $\widetilde{X}$. Remarquons que $\mathrm{supp}(D) \subseteq \widetilde{X} \setminus X_{\mathrm{sm}}$.

Définition 2.19. *Soit X une variété $\mathbb{Q}$-Gorenstein. Un point $p \in X$ est dit* ***canonique*** *si $D_p \geq 0$ (la restriction de D en un voisinage de p est un diviseur effectif dans ce voisinage).*

Lemme 2.20. *Soient X une variété $\mathbb{Q}$-Gorenstein et $p \in X$ un point. Alors p est canonique si et seulement si p n'impose pas de conditions adjointes.*

Le corollaire suivant est une conséquence directe du Lemme 2.20 et la Remarque 2.16.

Corollaire 2.21. *Si X est une variété canonique, c'est-à-dire tous les points de X sont canoniques. Alors X est de type général si $\omega_{X_{\mathrm{sm}}}$ est gros.*

2.8. **Preuve de la corrélation : cas général.** Nous finissons la démonstration du Théorème 2.5 dans cette sous-section.

Nous voudrions ramener le Théorème 2.5 à la Proposition 2.11. En effet, nous essayons d'associer à la fibration en courbes $f\colon X \to B$ une famille de courbes stables que f domine (sous une application rationnelle). Le point clef est l'existence de la famille universelle sur $\overline{\mathbb{M}}_g$.

Lemme 2.22. *Il existe une famille universelle au dessus d'un revêtement fini de $\overline{\mathbb{M}}_g$. Plus précisément, il existe un morphisme fini $\varphi\colon \Omega \to \overline{\mathbb{M}}_g$ et une famille de courbes stables $\mathcal{T} \to \Omega$ telles que $\varphi(x) = [\mathcal{T}_x]$ (paramétrise la courbe $\mathcal{T}_x$) pour tout $x \in \Omega$.*

Puisque $\overline{\mathbb{M}}_g$ est un espace de modules grossier, il faut forcément passer par un revêtement fini pour obtenir une famille universelle. Donc dans la démonstration il faut étudier les actions birationnelles par des groupes finis et prendre les quotients.

Comme notation, nous utilisons $\sim_{\mathrm{rat}}$ pour dire que deux variétés sont birationnelles.

1ère étape Avec l'application rationnelle $\phi\colon B \dashrightarrow \overline{\mathbb{M}}_g$ induite par f et le morphisme fini $\varphi\colon \Omega \to \overline{\mathbb{M}}_g$, nous pouvons construire un revêtement génériquement fini $B_2 \to B$ (en prenant le produit fibré). Posons $X_2 = X \times_B B_2$. Nous avons donc

$$\begin{array}{ccc} X_2 & & \mathcal{T} \\ {\scriptstyle f_2}\downarrow & & \downarrow \\ B_2 & \xrightarrow{\mu} & \Omega. \end{array}$$

Pourtant, il n'y a aucune raison que $X_2 \sim_{\mathrm{rat}} \mathcal{T} \times_\Omega B_2$! Par exemple si $X \to B$ est isotriviale, alors pour que $X_2 = X$ devienne birationnelle à la famille constante, il faut encore prendre un revêtement fini.

2ème étape Prenons B_3 la normalisation galoisienne de $B_2 \to B$.[4] Alors le groupe de Galois

$$G = \mathrm{Gal}(K(B_3)/K(B))$$

agit birationnellement sur B_3 tel que $B_3/G \sim_{\mathrm{rat}} B$.

Posons $X_3 = X \times_B B_3$ (dans le sens birationnel). Alors l'action birationnelle de G sur B_3 se relève en une action birationnelle de G sur X_3. De plus $X_3/G \sim_{\mathrm{rat}} X$.

3ème étape Posons $\Sigma_2 = \mu(B_2)$. Posons L la clôture algébrique de $K(\Sigma_2)$ dans $K(B_3)$. Posons Σ_3 la normalisation de Σ_2 dans L. Alors il y a une application rationnelle finie $\Sigma_3 \dashrightarrow \Sigma_2 \subseteq \Omega$. Posons $\mathcal{T}_3 = \mathcal{T} \times_\Omega \Sigma_3$ (dans le sens rationnel). Alors $\mathcal{T}_3 \to \Sigma_3$ est une famille de courbes stables de variation maximale (et Σ_3 est projective) !

Remarquons que $\mu\colon B_2 \to \Sigma_2 \subseteq \Omega$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_3 & \dashrightarrow & \mathcal{T}_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_3 & \dashrightarrow & \Sigma_3 \end{array}$$

tel que les applications horizontales sont dominantes.

L'action birationnelle de G sur $X_3 \to B_3$ descend en une action birationnelle sur $\mathcal{T}_3 \to \Sigma_3$ par construction. En effet, G fixe $K(B)$, et donc fixe $K(\phi(B))$, et donc envoie chaque élément de $K(B_3)$ qui est algébrique sur $K(\phi(B))$ à un élément algébrique sur $K(\phi(B))$. Donc G fixe $K(\Sigma_3)$, qui est la clôture algébrique de $K(\phi(B))$ dans $K(B_3)$.

Maintenant, l'on a des applications dominantes

$$X_B^n \sim_{\mathrm{rat}} (X_3)^n_{B_3}/G \dashrightarrow (\mathcal{T}_3)^n_{\Sigma_3}/G.$$

Nous ne pouvons malheureusement pas appliquer directement la Proposition 2.11 pour conclure. C'est pour cela que nous avons besoin d'une version raffinée, soit la Proposition 2.23.

[4]. B_3 est la normalisation de B dans la clôture galoisienne de $K(B_2)/K(B)$.

2.9. **Quotient sous l'action d'un groupe.**

Proposition 2.23. *Soit $f\colon X \to B$ une famille de courbes stables de variation maximale avec B projective. Supposons qu'un groupe fini G agit birationnellement sur X et B et que ces deux actions sont équivariantes. Alors le quotient X^n_B/G est de type général pour n assez grand.*

Démonstration. Nous commençons par le cas où les actions de G sont bi-régulières.

(i) Supposons en plus que l'action de G sur B est fidèle. Dans ce cas-là, $\mathrm{Fix}(g) = \{b \in B : g(b) = b\}$ est un sous-ensemble fermé propre dans B sauf si $g = 1$.

Posons $\Phi = \bigcup_{g\neq 1} \mathrm{Fix}(g)$. Alors $\dim \Phi < \dim B$. Donc il existe un diviseur effectif D_0 dont le support contient Φ. Posons $D = (\#G) \cdot D_0$.

Pour $f_n\colon X^n_B \to B$, la formule d'adjonction implique

$$\omega_{X^n_B}(-f_n^*D) = \omega_{f_n} \otimes f_n^*\omega_B(-D).$$

L'on a vu que ω_{f_n} est gros, et donc $\omega_{X^n_B}(-f_n^*D)$ est gros pour n assez grand par Lemme 2.14.

Chaque $\eta \in \Gamma(X^n_B, \omega_{X^n_B}(-f_n^*D)^{\otimes m})$ est une différentielle m-pluricanonique sur X^n_B qui s'annule en Φ à l'ordre $m\#G$. Donc X^n_B/G est de type général par Lemme 2.24 et Corollaire 2.21.

(ii) Si l'action de G sur B n'est pas fidèle, remplaçons Φ par

$$\Phi = \{b \in B : g \text{ fixe chaque point d'une composante de } X_b \text{ pour un } g \neq 1 \in G\}.$$

Si $\Phi = B$, alors l'action de G sur X est triviale et donc la proposition se déduit de la Proposition 2.11. Si $\dim \Phi < \dim B$, nous pouvons répéter la preuve dans le premier cas pour conclure.

Maintenant si les actions de G sont birationnelles, alors il existe un sous-ensemble ouvert Zariski dense U de B tel que G agit de manière bi-régulière sur U (car G est un groupe fini). Notons $G = \{g_1, \ldots, g_l\}$, et posons

$$\Gamma = \overline{\{(g_1p, \cdots, g_lp) : p \in U\}}^{\mathrm{Zar}} \subseteq B^l.$$

Alors l'action de G sur Γ, étant la restriction des permutations, est régulière. De plus la restriction de la première projection $\Gamma \to B$ est un morphisme birationel G-équivariante.

Prenons une résolution des singularités $B'' \to \Gamma$ telle que l'action régulière de G sur Γ se relève en une action régulière sur B''. Une telle résolution existe par Hihonaka.

Posons $X'' = X \times_B B''$. Alors l'action de G sur X se relève en une action régulière de G sur X''. En effet pour chaque $g \in G$, la variété

$$\Psi_g = \{(b, \psi) : b \in B'',\ \psi\colon X_b \to X_{g(b)} \text{ est un isomorphisme}\}$$

est un revêtement fini de B'' parce que chaque courbe stable n'a qu'un nombre fini d'automorphismes. L'actions (équivariantes) de g sur B'' et X donne une application rationnelle $B'' \dashrightarrow \Psi_g$. Mais $\Psi_g \to B''$ est fini et B'' est lisse, donc cette application rationnelle s'étend en un morphisme. Donc l'action de g sur X'' est régulière.

Par construction, $X'' \to B''$ est birationnelle à $X \to B$ et les actions de G sont équivariantes. Donc il suffit de démontrer la proposition pour $X'' \to B''$. Ceci nous permet de conclure. $\square$

Lemme 2.24. *Soient X une variété canonique et G un groupe fini agissant bi-régulièrement sur X. Soit $\eta \in \Gamma(X_{\mathrm{sm}}, \omega_{X_{\mathrm{sm}}}^{\otimes m})^G$. Si pour tout $p \in X$ l'on a pour l'ordre d'annulation*

$$\mathrm{ord}_p(\eta) \geq m(\#\mathrm{Stab}_G(p) - 1),$$

alors η descend en une forme régulière sur X/G.

Démonstration. Si X est lisse, l'on peut démontrer ce lemme en utilisant *le théorème du slice étale de Luna (Luna's étale slice theorem)*. En général, l'on se ramène au cas lisse par la résolution des singularités de Hironaka. □